Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyufbed

Araştırma Makalesi

Nümerik İntegrasyon Metodu ile Singüler Pertürbe Problemlerin Yaklaşık Çözümü

Derya ARSLAN*

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 13200, Bitlis, Türkiye
Derya ARSLAN, ORCID No: 0000-0001-6138-0607
*Sorumlu yazar e-posta: ayredlanu@gmail.com

Makale Bilgileri

Geliş: 27.03.2022
Kabul: 30.07.2022
Online Aralık 2022
DOI: 10.53433/yyufbed.1094184

Anahtar Kelimeler
Nümerik integrasyon metodu,
Singüler pertürbe problem,
Sonlu fark metodu,
Trapez metodu,
Volterra integro-diferansiyel denklem

Öz: Bu çalışmada, singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için nümerik integrasyon yöntemi uygulanır. İlk olarak düzgün bir şebeke üzerinde sonlu fark metodu ile başlanır daha sonra integraller için trapez metodu kullanılır. Buradan elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülür. Önerilen yöntemin doğruluğunu ve ekonomikliğini ortaya koyan bir örnek sunulur.

Approximate Solution of Singularly Perturbed Problems with Numerical Integration Method

Article Info

Recieved: 27.03.2022
Accepted: 30.07.2022
Online December 2022
DOI: 10.53433/yyufbed.1094184

Keywords
Finite difference method,
Numerical integration method,
Singularly perturbed problem,
Trapezoidal method,
Volterra integro-differential equation

Abstract: In this study, the numerical integration method is performed for approximate solution of the singularly perturbed Volterra integro-differential equations. Firstly, it starts with the finite difference method on the uniform mesh points, then the trapezoidal method is used for integrals. The system of equations obtained here is solved with the Thomas algorithm. An example is presented that demonstrates the accuracy and economy of the proposed method.

1. Giriş

İntegro-diferansiyel denklemler doğa bilimlerinde birçok matematiksel formül içerir. İntegral sınırlarından biri değişken olarak kabul edilen integro-diferansiyel denklemlere Volterra integro-diferansiyel denklemler denir. Volterra integro-diferansiyel denklemler bilim ve mühendisliğin çeşitli uygulama alanlarında yer almaktadır. Örneğin; fizik, kimya, biyoloji, akışkanlar dinamiği, atom fiziği, difüzyon, popülasyon ve salgın dinamikleri, glikoz toleransı matematiksel modelleri (Lodge ve ark., 1978; Kauthen, 1997; Jerri, 1999; De Gaetano & Arino, 2000; Kythe & Puri, 2002; Burton, 2005; Ramos, 2007; Salama & Bakr, 2007). Çoğu durumda bu problemlerin birçok analitik yöntemle kesin çözümlerini elde etmek mümkün değildir. Bu durumda, bu problemler yaklaşık metotlarla çözülür. Ayrıca, literatürde Volterra integro-diferansiyel denklemlerini çözmek için kullanılan farklı yaklaşımlar vardır. Bunlar, Piecewise-quasilinearization yöntemi (Ramos, 2007), exponential teknik ve implicit Runge-Kutta metodu (Ramos, 2008), coupled metodu (Tao & Zhang, 2019), sonlu fark metodu (Mbroh ve ark., 2007; Sevgin, 2014; Cimen, 2018; Yapman & Amiraliyev, 2020) ve diferansiyel dönüşüm metodu (Celik & Tabatabaei, 2013). Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği de literatürde yer almaktadır (Ross ve ark., 1996; Jerri, 1999; Kythe & Puri, 2002; Burton, 2005; Nefedov ve ark., 2006).

Bu makalenin motivasyonu ve amacı, ilk olarak, düzgün şebeke üzerinde Volterra integro-diferansiyel denkleminin sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü için doğru ve güvenilir bir yaklaşım sunmaktır. Çünkü problemimiz singüler pertürbe (Miller ve ark., 1996; Ross ve ark., 1996; Farrell ve ark., 2000) özelliklidir yani en yüksek mertebeden türevin katsayısında sıfır ile bir arasında olup birden çok küçük olan bir ε parametresi bulunmaktadır. Bu parametre problemde sınır katı veya katları oluşturur. Buralarda çözümün davranışı ani ve hızlı olarak değişir. Bu durum singüler pertürbe problemlerin çözümünde sınırlı olmayan türevler üretir. Ayrıca çalışmada ele aldığımız problemlerin integral terimler içermesi de analitik çözüme ulaşılmasını daha da güçleştirir. Bu sorunu şimdiye kadar uygulanmış ve uygulanmakta olan birçok klasik analitik ve nümerik metotlar gideremez. Bu nedenle çalışmada, ε parametresi için karalı çözümler veren nümerik integrasyon metodu kullanılmıştır.

Bu çalışma şu şekilde ilerleyecektir: İkinci bölümde nümerik integrasyon metodunun işleyişi verilecektir. Üçüncü bölümde önerilen metodun örnek problemi üzerinde uygulama yapılacaktır. Elde edilen yaklaşık sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulacaktır.

2. Nümerik İntegrasyon Metodu

Bu bölümde, yaklaşık çözümü aranan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri sol sınır katlara sahiptir ve buna göre nümerik integrasyon metodunun işleyiş adımları aşağıda verilecektir. Sunulan metot uygulandıktan sonra kararlılık şartlarının sağlandığı görülecektir. Nümerik integrasyon metoduna ilk olarak çözümü araştırılan denklemin integre edilmesiyle başlanır. Daha sonra ilk iki terime karşılık gelen sonlu fark türevleri alınır. İntegraller için trapez metodu kullanılır. En son elde edilen denklem sisteminin çözümü için Thomas algoritması uygulanır ve yaklaşık çözüm bulunur.

Nümerik integrasyon metodunun çeşitli denklemlere uygulandığı literatürde görülebilir (Reddy, 1990; Andargie & Reddy, 2008; Soujanya & Phnaeendra, 2015; Ranjan & Prasad, 2018; Arslan, 2020).

Nümerik integrasyon metodu ile incelenecek olan problem tipi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + \int_0^x K(x,s)u(s)ds = g(x), \quad x \in S = [0,1], \tag{1}$$

$$u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{2}$$

A ve B sonlu sabitler; ε birden çok küçük pozitif; $a(x) \in S,\ g(x) \in S$ ve $K(x,s) \in S \times S$ sürekli fonksiyonlardır. (1)-(2) problemi $a(x) > \alpha > 0$ için sol sınır katına sahiptir. Yani $x = 0$ çözümü sol sınır katıdır.

$[0,1]$ aralığı düzgün şebeke üzerinde çözüm arandığı için N eşit şebeke noktalarına parçalanır. Oluşan bu noktalar $0 = x_0 < x_1 ... < x_n = 1,\ \ x_i = x_0 + ih$ şeklindedir. Burada $h = \dfrac{1-0}{N}$ dir.

Şimdi (1) denkleminin $[x_i, x_{i+1}]_{i=1,...,N-1}$ aralığı için integrali alınır.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\varepsilon u'' + a(x)u'\right]dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{0}^{x} K(x,s)u(s)dsdx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx,$$

buradaki ikinci ve üçüncü integraller için trapez metodu kullanılır ve aşağıdaki denklem bulunur.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\left[u'(x_{i+1}) - u'(x_i)\right] + a_{i+1}u(x_{i+1}) - a_i u(x_i) + \frac{h^2}{4}K(x_i, x_0)u(x_0) \\ &+\frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1}K(x_i, x_m)u(x_m) + \frac{h^2}{4}K(x_i, x_i)u(x_i) + \frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_0)u(x_0) + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i}K(x_{i+1}, x_m)u(x_m) \\ &+\frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_{i+1})u(x_{i+1}) = \frac{h}{2}\left[g_i + g_{i+1}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(3) denkleminde

$$\left.\begin{aligned} T(x) = &\frac{h^2}{4}K(x_i, x_0)u(x_0) + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1}K(x_i, x_m)u(x_m) + \frac{h^2}{4}K(x_i, x_i)u(x_i) \\ &+\frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_0)u(x_0) + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i}K(x_{i+1}, x_m)u(x_m) + \frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_{i+1})u(x_{i+1}), \end{aligned}\right\}$$

olsun. (3) denkleminde bulunan $u'\left(x_{i+1}\right)$ ve $u'\left(x_i\right)$ türevleri için

$$u'\left(x_{i+1}\right) = \frac{u\left(x_{i+1}\right) - u\left(x_i\right)}{h}, \quad u'\left(x_i\right) = \frac{u\left(x_i\right) - u\left(x_{i-1}\right)}{h},$$

sonlu fark türevleri yerlerine yazılır ve aşağıdaki üç köşegenli sistemi bulunur.

$$\varepsilon\left[\frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{h}\right] + a\left(x_{i+1}\right)u_{i+1} - a\left(x_i\right)u_i + T\left(x\right) = \frac{h}{2}\left[g_i + g_{i+1}\right], \quad (4)$$

burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left.\begin{aligned} &u_{i-1}\left[\frac{\varepsilon}{h}\right] - u_i\left[\frac{2\varepsilon}{h} + a_i - \frac{h^2}{4}K(x_i, x_i)\right] + u_{i+1}\left[\frac{\varepsilon}{h} + a_{i+1} + \frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[g_i + g_{i+1}\right] \\ &-\frac{h^2}{4}K(x_i, x_0)u(x_0) - \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1}K(x_i, x_m)u(x_m) - \frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_0)u(x_0) \\ &-\frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i}K(x_{i+1}, x_m)u(x_m), \\ &\qquad\qquad u_0 = A, \qquad u_N = B, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi sonlu fark problemidir ve çözüm için aşağıda verilen Thomas algoritması uygulanır.

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h} + a_{i+1} + \frac{h^2}{4}K_{i+1,i+1}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + a_i - \frac{h^2}{4}K_{i,i},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = A,$$

$$F_i = -\frac{h}{2}\left[g_i + g_{i+1}\right] + \left(\begin{array}{l} \frac{h^2}{4}K(x_i, x_0)u(x_0) + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1} K(x_i, x_m)u(x_m) + \frac{h^2}{4}K(x_{i+1}, x_0)u(x_0) \\ + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i} K(x_{i+1}, x_m)u(x_m) \end{array} \right),$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$u_i = \alpha_{i+1}u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, ..., 2, 1.$$

2.1. Thomas algoritmasının kararlılığı

$i = 0,1,...,N-1$ için $A_i > 0$, $\mathrm{B}_i > 0$ ve $|\mathrm{C}_i| > |A_i + B_i| > 0$, ve $|\alpha_i| < 1$ durumlarında Thomas algoritması karalıdır ve (5) probleminin çözümünün varlığı ve tekliği garantilenir (Amiraliyev & Amirali, 2018).

3. Singüler Pertürbe Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemin Sınır Değer Problemi için Nümerik İntegrasyon Metodu Uygulaması

Bu kısımda nümerik integrasyon metodunun gücünü ve zaman açısından ekonomikliğini ortaya çıkarmak için aşağıda verilen sol sınır kata sahip bir singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer problemi yaklaşık olarak çözülür:

$$\begin{aligned} &\varepsilon u''(x) + 2u'(x) + \int_0^x u(s)ds = \frac{x}{2} - \frac{\varepsilon}{4}(1 - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}), \quad x \in [0,1], \\ &u(0) = 0, \quad u(1) = \left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)/2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}\right).$$

Şimdi nümerik integrasyon metodu kullanarak (6) problemini çözelim:
İlk olarak (6) probleminde Volterra integro-diferansiyel denkleminin her terimimin $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında integrali alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varepsilon u'' + 2u']dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_0^x u(s)dsdx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{x}{2} - \frac{\varepsilon}{4}(1 - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}})\right]dx, \tag{7}$$

ve bu denklemde ilk integral alındıktan sonra u'_{i+1} ve u'_i türevleri için

$$u'_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

sonlu fark türevleri kullanılır ve diğer integrallere karşılıkta trapez metodu uygulanırsa

$$\varepsilon\left[u'(x_{i+1}) - u'(x_i)\right] + 2u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + \frac{h^2}{4}u(x_0) + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1}u(x_m) + \frac{h^2}{4}u(x_i)$$
$$+\frac{h^2}{4}u(x_0) + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i}u(x_m) + \frac{h^2}{4}u(x_{i+1}) = \frac{h}{2}\left[f_i + f_{i+1}\right],$$

aşağıdaki sonlu fark problemi elde edilir:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{i-1}\left[\frac{\varepsilon}{h}\right] - u_i\left[\frac{2\varepsilon}{h} + 2 - \frac{h^2}{4}\right] + u_{i+1}\left[\frac{\varepsilon}{h} + 2 + \frac{h^2}{4}\right] \\
&= -\left(2\frac{h^2}{4}u_0 + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1}u_m + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i}u_m - \frac{h}{2}\left[\frac{x_{i+1}}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{-\frac{2x_{i+1}}{\varepsilon}}\right) + \frac{x_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{-\frac{2x_i}{\varepsilon}}\right)\right]\right), \\
&\qquad u_0 = 0, \quad u_N = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right).
\end{aligned}\right\}$$

Bu sonlu fark probleminin çözümü için Thomas algoritmasını da şöyle yazılır:

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h} + 2 + \frac{h^2}{4}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + 2 - \frac{h^2}{4}, \quad \alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = A,$$

$$F_i = 2\frac{h^2}{4}u_0 + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i-1}u_m + \frac{h^2}{2}\sum_{m=1}^{i}u_m - \frac{h}{2}\left[\frac{x_{i+1}}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{-\frac{2x_{i+1}}{\varepsilon}}\right) + \frac{x_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{-\frac{2x_i}{\varepsilon}}\right)\right],$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\dfrac{\varepsilon}{h} + 2 + \dfrac{h^2}{4}}{\dfrac{2\varepsilon}{h} + 2 - \dfrac{h^2}{4} - \alpha_i\dfrac{\varepsilon}{h}},$$

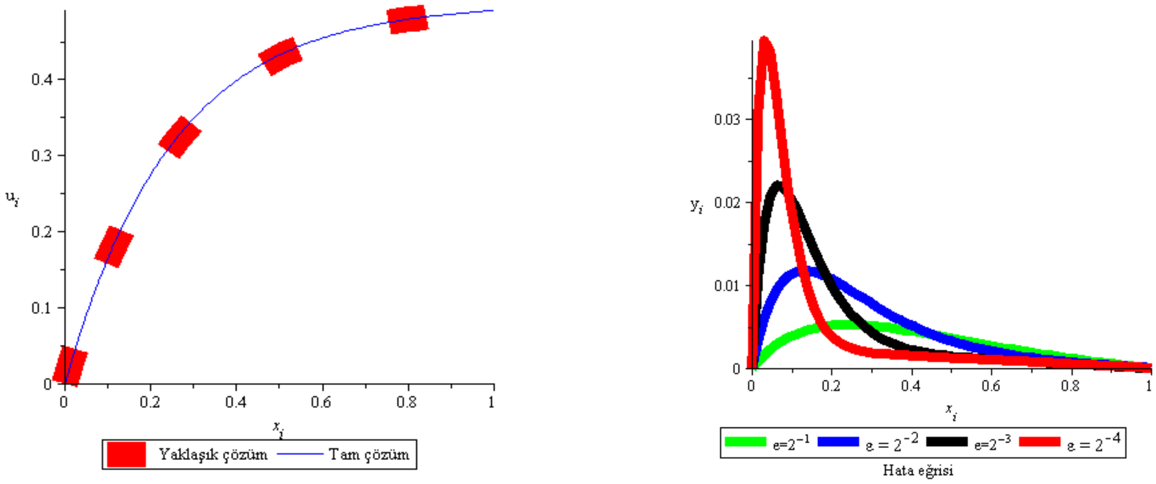
$$\beta_{i+1} = \frac{2\dfrac{h^2}{4}u_0 + \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{i-1}u_m + \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{i}u_m - \dfrac{h}{2}\left[\dfrac{x_{i+1}}{2} - \dfrac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{-\frac{2x_{i+1}}{\varepsilon}}\right) + \dfrac{x_i}{2} - \dfrac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{-\frac{2x_i}{\varepsilon}}\right)\right] + \beta_i\dfrac{\varepsilon}{h}}{\dfrac{2\varepsilon}{h} + 2 - \dfrac{h^2}{4} - \alpha_i\dfrac{\varepsilon}{h}},$$

$$\mathrm{u}_i = \alpha_{i+1}u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \ldots, 2, 1.$$

Yukarıda verilen Thomas algoritması akışı ile uygun bir matematik programından yaralanılarak singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer probleminin yaklaşık çözüm sonuçları elde edilir. N ve ε değerleri için tam, yaklaşık çözüm ve hata grafikleri çizilerek karşılaştırılır. Maksimum hatalar bulunur ve Çizelge 1'de gösterilir. Buraya göre N değerleri büyüdükçe hata değerleri yarıya inerek azalmaktadır. Yani yakınsaklık birinci mertebedendir. Böylece önerilen metodun singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer problemleri için uygun ve güvenilir olduğu ortaya çıkarılır.

Çizelge 1. N ve ε için maksimum hata değerleri

N	$\varepsilon = 2^{-1}$	$\varepsilon = 2^{-2}$	$\varepsilon = 2^{-3}$	$\varepsilon = 2^{-4}$
N=1/h=16	0.0192337808	0.0408410668	0.0696104025	0.1243379260
N=1/h =32	0.0101601715	0.0223025458	0.040302946	0.0641243472
N=1/h =64	0.0052285881	0.0117111541	0.0219462477	0.0324417494
N=1/h =128	0.0026545936	0.0060061453	0.0109212592	0.0164795314
N=1/h =256	0.0013382822	0.0030412247	0.0058962817	0.0082539887



Şekil 1. $N = 64$ için yaklaşık ve tam çözüm eğrileri (sol), hata eğrisi (sağ).

4. Sonuç

Singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer problemi nümerik integrasyon metodu ile incelenmiştir. Problem $x = 0$’da sol sınır katına sahiptir. Burada çözüm ani ve hızlı bir şekilde değişmiştir ve çözüm eksenlere doğru yaslanmıştır. Çözüm grafiklerinin yer aldığı Şekil 1’e (sol) bakılırsa eğriler çakışmaktadır. Şekil 1’de (sağ) görüldüğü gibi sadece sınır katı bölgesinde çözümün ani ve hızlı değişiminden dolayı hatalar maksimumdur. Ayrıca yaklaşık ve tam çözüm sonuçlarının hemen hemen aynı olduğu Çizelge 1’de görülen maksimum hata verileriyle ispatlanmaktadır. Çünkü yukarıdan-aşağı doğru hatalar yarılanır. Yani yaklaşık çözüm $O(h)$ kesinliğine sahiptir. Ayrıca Thomas algoritması karalıdır çünkü $|\alpha_i| < 1, \;\; i = 0,1,...,N-1$ şartı sağlanır. Tüm bu verilere göre metot karalı, güvenilir ve elverişlidir.

Literatüre katkı sağlaması düşüncesi ile Fredholm, Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlere ve bunların gecikmeli tiplerine nümerik integrasyon metodu uygulanabileceği söylenebilir.

Kaynakça

Amiraliyev, G. M., & Amirali, I. (2018). *Nümerik Analiz Teori ve Uygulamalarla.* Ankara, Türkiye: *Seçkin Yayıncılık.*

Andargie, A. & Reddy, Y. N. (2008). Numerical integration method for singular perturbation problems with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mathematics & Informatics,* 26(5-6), 1273-1287.

Arslan, D. (2020). A numerical solution for singularly perturbed multi-point boundary value problems with the numerical integration method. *BEU Journal of Science*, 9(1), 157-167. doi: 10.17798/bitlisfen.662732

Burton, T. A. (2005). *Volterra Integral and Differential Equations.* 2nd Ed. Amsterdam, Netherland: Elsevier.

Cimen E. (2018). A computational method for Volterra integro-differential equation. *Erzincan University Journal of Science and Technology,* 11(3), 347-352. doi: 10.18185/erzifbed.435331

Celik, E. & Tabatabaei, K. (2013). Solving a class of Volterra integral equation systems by the differential transform method. *International Journal of Nonlinear Science*, 16(1), 87-91.

De Gaetano, A. & Arino, O. (2000). Mathematical modelling of the intravenous glucose tolerance test. *Journal of Mathematical Biology,* 40, 136-168. doi: 10.1007/s002850050007

Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan E., & Shishkin, G. I. (2000). *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*. New York, USA: Chapman-Hall/CRC.

Jerri, A. (1999). *Introduction to Integral Equations with Applications.* New York, USA: Wiley.

Kauthen, J. P. (1997). A survey on singularly perturbed Volterra equations. *Applied Numerical Mathematics,* 24, 95-114. doi: 10.1016/S0168-9274(97)00014-7

Kythe, P. K., & Puri, P. (2002). *Computational Methods for Linear Integral Equations*. Boston, USA: Birkhauser.

Lodge, A. S., McLeod, J. B., & Nohel, J. A. A. (1978). A nonlinear singularly perturbed Volterra integro differential equation occurring in polymer rheology. 80, 99-137. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics,* doi: 10.1017/S0308210500010167

Mbroh, N. A., Noutchie, S. C. O., & Massoukou, R. Y. M. (2007). A second order finite difference scheme for singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Alexandria Engineering Journal,* 59, 2441-2447. doi: 10.1016/j.aej.2020.03.007

Miller, J. J. H., O'Riordan, E., & Shishkin, G. I. (1996). *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions*. Singapore: World Scientific.

Nefedov, N. N., Nikitin, A. G., & Urazgil'dina, T. A. (2006). The Cauchy problem for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 46, 768-775. doi: 10.1134/S0965542506050046

Ramos, J. I. (2007). Piecewise-quasilinearization techniques for singularly perturbed Volterra integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* 188, 1221-1233. doi: 10.1016/j.amc.2006.10.076

Ramos, J. I. (2008). Exponential techniques and implicit Runge-Kutta method for singularly perturbed Volterra integro differential equations. *Neural, Parallel and Scientific Computations,* 16, 387-404.

Ranjan, R., & Prasad, H. S. (2018). An efficient method of numerical integration for a class of singularly perturbed two point boundary value problems. *Mathematics,* 17, 265-273.

Reddy, Y. N. (1990). A Numerical integration method for solving singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation,* 37, 83-95. doi: 10.1016/0096-3003(90)90037-4

Ross, H. G., Stynes, M., & Tobiska, L. (1996). *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow Problems.* Berlin, Germany: Springer Verlag.

Salama, A. A., & Bakr, S. A. (2007). Difference schemes of exponential type for singularly perturbed Volterra integro-differential problems. *Applied Mathematical Modelling,* 31, 866-879. doi: 10.1016/j.apm.2006.02.007

Sevgin, S. (2014). Numerical solution of a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Advances in Difference Equation,* 2014, 1-15. doi: 10.1186/1687-1847-2014-171

Soujanya, G., & Phnaeendra, K. (2015). Numerical intergration method for singular-singularly perturbed two- point boundary value problems. *Procedia Engineering,* 127, 545-552. doi: 10.1016/j.proeng.2015.11.343

Tao, X., & Zhang, Y. (2019). The coupled method for singularly perturbed Volterra integro-differential equations. *Advances in Continuous and Discrete Models,* 217, 1-16. doi: 10.1186/s13662-019-2139-8

Yapman, O., & Amiraliyev, G. M. (2020). A novel second-order fitted computational method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *International Journal of Computer Mathematics,* 97, 1293-1302. doi: 10.1080/00207160.2019.1614565