Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 40:2 (2025) 995-1009

Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi
Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Elektronik / Online ISSN : 1304 - 4915
Basılı / Printed ISSN : 1300 - 1884

Improved Konno Yamazaki model: Portfolio optimization based on stochastic and fuzzy programming

Mehveş Güliz Kelce, Kumru Didem Atalay*, Tusan Derya
Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Başkent University, 06790, Ankara, Türkiye

Highlights:

- Stochastic and fuzzy mathematical models for portfolio selection
- Alternative choices to investors depending on the return and risk ratio
- Mathematical models with uncertain parameters based on mean absolute deviation

Keywords:

- Portfolio optimization
- Chance constrained programming
- Stochastic programming
- Fuzzy mathematical programming

Article Info:
Research Article
Received: 09.02.2024
Accepted: 29.08.2024

DOI:
10.17341/gazimmfd.1434287

Correspondence:
Author: Kumru Didem Atalay
e-mail: katalay@baskent.edu.tr
phone: +90 532 548 7146

Graphical/Tabular Abstract

Return is a term that refers to the financial results of an investment or financial asset, usually over a given period. Returns play an important role in investors' financial decision-making. Investors who want to maximize their returns should also consider the risk of the investment, the maturity and other factors. Financial life is full of uncertainties and it is difficult to predict what the future holds for investors. Since earnings are in most cases not certain and involve many uncertainties, the concept of expected return emerges, which provides an estimated return. In cases where expected return cannot be precisely determined, investors expect to minimize risk to maximize expected return. Moreover, in order to improve the quality of investment, it is very important to provide investors with alternative portfolio options for the future. Solution results for the fuzzy and stochastic versions of the Konno Yamazaki model are given in Table A.

- Thanks to the models developed within the scope of this study, different portfolio options have been created for investors.
- Investors can make choices by examining these options and observing their expected returns and the risk values they must bear.
- The investor who has alternative options will have the privilege of making decisions in his favor.

Table A. Crip model (CM), fuzzy model 1(FM1), fuzzy model 2 (FM2) and stochastic model (SM) solutions

Model	Alfa (α)	Number of Share	Return	Risk (Mean Absolute Deviation)	Modified Sharpe Ratio *
KM	-	12	0,123045	0,631330	0,193552
BM1	0,99	11	0,185432	0,636671	0,289917
BM2	0,1	12	0,254244	0,646018	0,392240
	0,3	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,5	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,7	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,9	12	0,123045	0,631330	0,193552
SM	0,1	7	0,607378	0,803515	0,754843
	0,3	12	0,286973	0,652542	0,438474
	0,5	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,7	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,9	12	0,123045	0,631330	0,193552

Purpose:
In this study, the fuzzy and stochastic Konno Yamazaki model is considered to determine portfolio options by taking the daily 2nd session closing values of the stocks in Borsa Istanbul 50 (BIST 50).

Theory and Methods:
Fuzzy linear programming and chance constrained programming approaches are used to solve the Konno Yamazaki model under the assumptions that the expected returns are fuzzy and stochastic.

Results:
As a result of the analysis conducted in this study, it is observed that there is a positive correlation between risk and expected return values.

Conclusion:
An investor who wants to increase his/her return should take a higher risk.

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 40:2 (2025) 995-1009

Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi
Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Elektronik / Online ISSN : 1304 - 4915
Basılı / Printed ISSN : 1300 - 1884

Geliştirilmiş Konno Yamazaki modeli: Stokastik ve bulanık programlamaya dayalı portföy optimizasyonu

Mehveş Güliz Kelce, Kumru Didem Atalay*, Tusan Derya
Başkent Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 06790, Etimesgut, Ankara, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Portföy seçimi için stokastik ve bulanık matematiksel modeller
- Yatırımcılar için getiri ve risk oranına bağlı alternatif seçimler
- Ortalama mutlak sapmaya dayalı belirsiz parametrelere sahip matematiksel modeller

Makale Bilgileri
Araştırma Makalesi
Geliş: 09.02.2024
Kabul: 29.08.2024

DOI:
10.17341/gazimmfd.1434287

Anahtar Kelimeler:
Portföy optimizasyonu, şans kısıtlı programlama, stokastik programlama, bulanık matematiksel programlama

ÖZ

Getiri, yatırım veya finansal bir varlığın genellikle belirli bir dönemdeki mali sonuçlarını ifade eden bir terimdir. Yatırımcıların finansal karar alma sürecinde getiri önemli bir rol oynar. Kazançlarını en büyüklemek isteyen yatırımcılar yatırımın riskini, vadeyi ve diğer faktörleri de göz önünde bulundurmalıdır. Finansal hayat belirsizliklerle dolu olup, gelecekteki günlerin yatırımcıya ne getireceğini tahmin etmek oldukça güçtür. Kazançlar çoğu durumda kesin olmayıp birçok belirsizlik barındırdığından, tahmini kazancın elde edilmesini sağlayan beklenen getiri kavramı ortaya çıkmaktadır. Beklenen getirinin tam olarak belirlenemediği durumlarda, rasyonel yatırımcılar belli bir risk seviyesinde en yüksek beklenen getirili yatırımları; belli bir beklenen getiri seviyesinde ise en düşük riskli yatırımları tercih ederler. Ayrıca, yatırım kalitesini artırabilmek için yatırımcılara geleceğe yönelik alternatif portföy seçenekleri sunulması oldukça önemlidir. Bu çalışmada Borsa İstanbul 50 (BIST 50)'de yer alan hisse senetlerinin gün sonu kapanış fiyatları alınarak, hisse senedine yapılan yatırım oranları, risk ve beklenen getiri değerlerinin belirlenmesi amacıyla bulanık ve stokastik Konno-Yamazaki modeli ele alınmıştır. Belirsizlik içeren ve kesin olarak belirlenemeyen beklenen getiri miktarının bulanık ve rassal olduğu varsayımları altında bulanık doğrusal programlanma ve şans kısıtlı programlama yaklaşımları modelin çözümü için kullanılmıştır.

Improved Konno Yamazaki model: Portfolio optimization based on stochastic and fuzzy programming

H I G H L I G H T S

- Stochastic and fuzzy mathematical models for portfolio selection
- Alternative choices to investors depending on the return and risk ratio
- Mathematical models with uncertain parameters based on mean absolute deviation

Article Info
Research Article
Received: 09.02.2024
Accepted: 29.08.2024

DOI:
10.17341/gazimmfd.1434287

Keywords:
Portfolio optimization, chance constrained programming, stochastic programming, fuzzy mathematical programming

ABSTRACT

Return is a term that refers to the financial results of an investment or financial asset, usually over a given period. Returns play an important role in investors' financial decision-making. Investors who want to maximize their returns should also consider the risk of the investment, the maturity and other factors. Financial life is full of uncertainties and it is difficult to predict what the future holds for investors. Since earnings are in most cases not certain and involve many uncertainties, the concept of expected return emerges, which provides an estimated return. In cases where the expected return cannot be determined exactly, rational investors choose investments with the highest expected return at a certain risk level; at a certain level of expected return, they prefer the investments with the lowest risk. Moreover, in order to improve the quality of investment, it is very important to provide investors with alternative portfolio options for the future. In this study, the fuzzy and stochastic Konno-Yamazaki model is considered to determine the investment amounts, risk and expected return values made in the stock by taking the end-of-day closing prices of the stocks in Borsa Istanbul 50 (BIST 50). Fuzzy linear programming and chance constrained programming approaches are used to solve the model under the assumptions that the expected returns are fuzzy and stochastic.

*Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : mguliz.tosun@gmail.com, *katalay@baskent.edu.tr, tderya@baskent.edu.tr / Tel: +90 532 548 7146

1. Giriş (Introduction)

Portföy optimizasyon problemi, Markowitz'in [1] ortaya koyduğu modern portföy teorisi çalışmalarından bu yana finans mühendisliğinin ilgi alanlarından biri olmuştur. En iyi portföyü oluşturabilmek için portföyde yer alan hisse senetlerinin getiri ve risk ilişkisine bakılarak portföy seçim işlemi gerçekleştirilmektedir. Finansal yöneticinin amacı, minimum risk ve maksimum getiriyi sağlayacak etkin bir portföyü oluşturmaktır. Bu amaçla yeni modeller ve bilgisayar teknolojileri artan bir hızla devam etmektedir [2].

Portföy genel ekonomik koşullara ve yatırımcıların isteklerine göre değişik amaçlarla oluşturulabilir. Portföy yönetiminin amacı sahip olunan servetin satın alma gücünün korunması olabileceği gibi servetin artırılması da olabilir. Yatırımcının kabul ettiği bir risk düzeyinde en yüksek getiriyi sağlamak da portföy yönetiminin amacı olabilir. Portföy amacına ulaşabilmek, belirli niteliklere sahip menkul kıymetlerden portföy oluşturulmasına ve portföyün ihtiyaç duyduğu anda güncellenmesine bağlıdır. Menkul kıymetlerin portföyden ne zaman çıkartılacağı ve yerine ne zaman hangi nitelikte menkul kıymetin ilave edileceğini bilmek portföy yönetiminin etkinliğini artırmaktadır.

Portföy seçimi günümüzde toplumun önemli sorunlarından birisidir. Dünyanın her yerinde yatırımcılar karar verme aşamalarında zorlanmakta olup, sermaye piyasası dinamikleri çoğu zaman böyle bir kararı daha da zor bir hale getirir. Buna bağlı olarak, yatırım hayatlarını önemli ölçüde etkileyebileceğinden, genellikle yatırım portföyü seçim sürecini destekleyen bazı karmaşık mekanizmalara güvenmeleri gerekir [3].

Modern portföy kuramının temeli tüm yatırımcıların aynı risk düzeyinde maksimum getiriye, aynı getiri düzeyinde ise minimum riske sahip olma istekleri üzerine ortaya çıkmıştır [4]. Getirinin beklenen düzeyden farklı olması riski temsil eder. Modern portföy yaklaşımının yaratıcısı olan Markowitz'in ortalama varyans yöntemi portföy optimizasyonu için pratik bir araç olarak görülmektedir. Finansal varlık getirileri arasındaki ilişkileri göz önünde bulundurmuş ve pozitif ilişki içinde olmayan finansal varlıkların aynı portföyde birleştirilmesiyle beklenen getiriyi azaltmadan riskin azaltılabileceği sonucuna ulaşmıştır [1]. Markowitz 1959 yılında risk ölçüsü olarak varyans yerine yarı varyansın kullanılmasını önermiştir. Markowitz'in modern portföy kuramı ile ilgili yaptığı çalışmaları Sharpe [5], Lintner [6] ve Mossin [7] gibi araştırmacılar izlemiştir.

Markowitz'in ortalama varyans yöntemi portföy optimizasyonu uygulamalarında kullanılmaktadır. Varyans fonksiyonuna bağlı olarak ortaya çıkan karesel programlama problemi, gelişmiş matematiksel programlama ile çözülür. Getiri oranının çok değişkenli normal dağılıma uyması, genellikle hisse senetleri için geçerli bir varsayım olarak kabul edilen 'beklenen faydanın maksimuma çıkarılması ilkesiyle tutarlıdır. Varyans fonksiyonuna bağlı olarak karesel programlama problemi ortaya çıkar [8]. Karesel programlama modeline bağlı çözüm elde etme zorlukları araştırmacıları, Markowitz'in modelini hem hesaplamalı hem de teorik olarak geliştirme çabaları için motive etmiştir. Ortalama mutlak sapmayı risk fonksiyonu olarak kullanan Konno-Yamazaki modeli, klasik Markowitz modelinin avantajlarını korurken, bu modele ilişkin zorlukların çoğunu da ortadan kaldırabilmektedir. Konno-Yamazaki [9] modeli, çok fazla hisse senedinin bulunduğu büyük ölçekli problemlerde, çözüm zamanlarında anlamlı azalmalar sağlamıştır. Risk ölçümü olarak kovaryans matrisini kullanan optimizasyon modelinde ortaya çıkan karesel programlama problemlerinin hesaplama güçlüğünü de ortadan kaldırmıştır. Konno vd. [10], portföy optimizasyonunda getirilerin dağılımında ortalama ve varyans ile birlikte üçüncü momenti de dikkate alarak bir doğrusal programlama modeli geliştirmişlerdir. Konno ve Wijayanayake [11], portföy optimizasyon modelinin çözümü için dal ve sınır algoritması önermişlerdir.

Kardiyen [12], Markowitz'in ortalama varyans modeli ve Konno ve Yamazaki'nin ortalama mutlak sapma modelinin ayrıntılarını inceleyerek, karşılaştırmalı analizler sunmuştur. Zhang ve Yu [13], ortalama mutlak sapma yaklaşımını genişleterek yeni bir portföy modeli oluşturmuşlardır. Moon ve Yao [14], portföy optimizasyonu için parametrelerdeki belirsizliği dikkate alan gürbüz ortalama mutlak sapma modelini geliştirmişlerdir. Kasenbacher vd. [15], ortalama varyans modeli ve ortalama mutlak sapma modelini karşılaştırmışlardır. Chaiyakan [16], portföy seçimi için getiri oranlarının belirsizliği durumunda kullanılan doğrusal programlama modeli önermiştir. Büberkökü [17], Markowitz'in ortalama varyans modeli ve üç alternatif portföy optimizasyon yönteminin performans karşılaştırmasını yapmıştır. Sehgal ve Jagadesh [18], beklenen getirilerle ilişkili belirsizlikleri dikkate alarak, yarı-ortalama mutlak sapma risk ölçüsüne dayalı robust bir portföy optimizasyonu modeli önermişlerdir. Bello vd. [19], Konno ve Yamazaki, Feinstein ve Thapa, Adjusted Feinstein ve Thapa ve ChiangLin portföy modellerini karşılaştırmışlardır.

Kocadağlı ve Cinemre [20], bulanık getiri ve bulanık risk fonksiyonlarıyla Konno ve Yamazaki'nin modelini geliştirmişlerdir. Fang vd. [21] ile Bozdağ ve Türe [22], likiditeye ilişkin yatırımcı deneyimlerini portföy modeline aktarmak için bulanık doğrusal programlama modeli kullanmışlardır. Rayoo [23], yatırım getiri oranlarının negatif ve pozitif çarpık dağılımları arasında ayrım yapamadığı ve özellikle çok sayıda seçenek mevcut olduğunda bu modelin eksiklik içerdiğini vurgulamış ve öneriler getirmiştir. Huang [24], portföy riskini güvenilirliğe dayalı varyansa göre ölçerek, güvenilirliğe dayalı bulanık ortalama varyans modellerini formüle etmiştir. Bulanık ortalama yarı varyans modeli Huang [25] tarafından geliştirilmiştir.

Chen vd. [26], Markowitz modelinin riskleri ölçmek için standart sapmayı kullanması nedeniyle, hem pozitif hem de negatif risklerin aslında değişken olarak kullanıldığını, oysa gerçekte yatırımcıların yalnızca negatif risklere odaklanma eğiliminde olduklarını öne sürmektedir. Buna göre modele geliştirme önerilerinde bulunmuştur. Li vd. [27], yatırım riski göz önünde bulundurularak, bulanık şans kısıtlı portföy seçim modeline risk kısıtının da eklenmesiyle optimal portföy problemi üzerine çalışmışlardır. Barak vd. [28], varlık sınırlamalarını likidite gereksinimiyle birleştiren bulanık bir portföy ortalama varyans çarpıklık modeli önermişlerdir. Modelin çözümü için genetik algoritma ve bulanık simülasyonun birleşiminden oluşan hibrit bir algoritma geliştirmişlerdir.

Gupta vd. [29], portföy seçimi problemi için bulanık şans kısıtlı çok amaçlı bir güvenirlik modeli önermişlerdir. Bulanık parametrelerin genel fonksiyonel formlarla karakterize edildiği çok amaçlı portföy seçim problemini ele almışlardır. Branda [30], varyansın en aza indirildiği, çarpıklığın en üst düzeye çıkarıldığı yatırım problemi üzerinde çalışmıştır. Portföyün beklenen getirisini bulan, konveks olmayan çok amaçlı stokastik programlama yaklaşımını kullanmıştır. Chen vd. [31], bulanık çok amaçlı portföy seçimi problemine bulanık ortalama yarı değişkenlik kavramını veri zarflama analizi modeliyle birleştirmiştir. Jo vd. [32], belirsizlik içeren portföy optimizasyonu konusunda hem bulanık hem de stokastik dünyadaki sınırlamaların üstesinden gelmek için stokastik korelasyonu kullanan bulanık portföy seçim modelini önermişlerdir. Bulanık portföy teorisi, hisse senedi fiyatının gelecekteki hareketini tahmin etmek amacıyla yatırımcılar için cazip bilgiler sunmaktadır. Çalışmada, bulanık güvenilirlik varyansını stokastik korelasyonla birleştirmek için hibrit bir risk ölçüsü önerilmiştir. Önerilen modelin, Markovitz modelinde olduğu gibi korelasyon hesabından kaynaklanan hesaplama zorlukları vardır. Çalışmada stokastik programlama tekniklerinden yararlanılmadığı dikkat çekmektedir. Subulan [33], uzlaşık programlama ve bulanık hedef programlama tekniklerinden yararlanan çok amaçlı, doğrusal olmayan bir karma tamsayılı programlama modeli geliştirmiştir.

Gerçek hayatta, portföy optimizasyon problemlerinde beklenen getiri kavramı belirsiz parametrelerden birisi olarak ortaya çıkar. Buna bağlı olarak da risk de rassallıktan kaynaklanan veya bilgi eksikliğine bağlı bulanıklıktan kaynaklanan belirsizlikler içermektedir. Bu durumda oluşan problemler stokastik veya bulanık programlama problemleri olarak adlandırılır. Stokastik modellerde kısıtların veya amaçların belirli bir seviyeye kadar yani belirli bir şans düzeyinde gerçekleşmesini sağlayan modellemelere şans kısıtlı programlama adı verilir. Şans kısıtlı modellerdeki temel mantık problemin olasılıklı yapısını deterministik bir yapıya dönüştürmeye olanak sağlar. Bu yapıyı oluştururken rasgelelik içeren parametreler de olasılıksal yapısı göz önüne alınarak modelin çözümünün bulunmasını sağlar [34, 35].

Bu çalışmada, Borsa İstanbul 50 (BIST 50)'den elde edilen hisse senetleri kullanılarak geleceğe yönelik beklenen getiri ve risk oranlarının finansal belirsizlikler içerdiği durumlarda, bulanık ve stokastik programlamayı temel alan portföy optimizasyonu yapılmıştır. Bulanık matematiksel programlama ve şans kısıtlı programlamayı temel alan Konno-Yamazaki model çözümleri farklı anlamlılık dereceleri ve alfa kesme değerleri için çözülerek karşılaştırılmıştır. Modelin çözümü sonucunda beklenen getirinin maksimum ve riskin minimum düzeyde olmasını isteyen yatırımcılara farklı düzeylerde portföy seçenekleri oluşturulmuştur. Riskten kaçınan, risk arayan ve riske karşı nötr olan üç farklı yatırımcı için farklı öneriler sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Literatürde belirsiz parametre olan beklenen getiri oranını hem bulanık hem de rassal değişken olarak ele alan ve ortalama sapma ölçütüne göre portföy optimizasyonu yapan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Önerilen stokastik model ortalama mutlak sapmayı kullanarak karesel yapıyı ortadan kaldırmış ve stokastik programlama modellerinden biri olan şans kısıtlı programlama modelini kullanarak da literatüre bir katkı sağlamıştır. Çalışma bu yönü ile yenilik içermektedir. Ayrıca gerçek hayat verilerini kullanarak yani BIST 50 değerlerine bağlı olarak portföy seçimi gerçekleştirilmiş olup gerçek bir problemin çözümü elde edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümü belirsiz beklenen getiriye sahip Konno-Yamazaki modelinin hem bulanık programlama hem de stokastik şans kısıtlı programlamaya dayalı deterministik modelleri sunulmuştur. Üçüncü bölümde önerilen modellerin BIST 50' de 30.10.2023 ve 01.12.2023 tarihleri arasında işlem görmüş olan 50 hisse senedine ait verilerin günlük kapanış fiyatları alınarak uygulaması yapılmıştır. Sayısal analizler ve yorumları dördüncü bölümde sunulmuştur. Son bölüm ise sonuçlardan oluşmaktadır.

2. Belirsiz Beklenen Getiriye Sahip Konno-Yamazaki Modeli
(Konno-Yamazaki Model with Uncertain Expected Return)

2.1. Konno-Yamazaki Doğrusal Programlama Modeli
(Konno-Yamazaki Linear Programming Model)

Optimal portföyün oluşturulması ve yönetilmesi amaçlı çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir. Modern portföy teorisinin temelini Markowitz [1]'in geliştirdiği ortalama varyans modeli oluşturmaktadır. Bu modelde Markowitz risk ölçüsü olarak portföy varyansını kullanmıştır. Minimum portföy getirisinin yatırımcıların minimum gereksinimlerini karşılayacağı bir model yapısı vardır. Model, her bir menkul kıymet çifti arasındaki ilişkiyi dikkate alır. Markowitz, portföyün riskini getirilerin standart sapması ile ölçmüş ve etkin portföy seçimini matematiksel olarak, hedeflenen getiri düzeyinde portföy varyansının minimizasyonu şeklinde tanımlayarak, bir karesel programlama problemi ortaya koymuştur [36]. Markowitz portföy optimizasyon modeli, teorik açıdan sahip olduğu ünün aksine, geniş ölçekli bir portföy oluşturmada orijinal şekli ile yaygın olarak kullanılmamıştır. Bunun en önemli nedenlerinden biri modelin hesaplama açısından sahip olduğu zorluktur. Söz konusu zorluk geniş ölçekli karesel programlamanın yoğun bir kovaryans matrisi ile çözülmesi ile ilişkilendirilmektedir [37].

Konno ve Yamazaki [9], Markowitz'in portföy optimizasyon modelinin karesel programlama gerektirdiği, karesel programlamanın ise kovaryans matrislerinin oluşturulmasındaki zorluklar nedeniyle büyük ölçekli portföylere uygulanmasının zor olduğunu iddia etmişler ve alternatif olarak bir doğrusal programlama modeli önermişlerdir. Söz konusu iki model birbirleri ile benzerliklerine karşın, risk fonksiyonu konusunda birbirlerinden ayrılmıştır. Konno ve Yamazaki, ortalama varyans modelinin zorluklarının yanı sıra yatırımcıların çoğunun risk ölçümünde standart sapmayı kabullenmekte zorlandığını iddia etmiş ve risk ölçütü olarak standart sapma yerine ortalamadan mutlak sapmayı önermişlerdir. Konno ve Yamazaki'nin portföy optimizasyonu konusunda geliştirdikleri doğrusal programlama modeli Eş. 1-Eş. 7 ile verilmiştir. Bu matematiksel model makale kapsamında belirli parametrelere sahip olduğundan kesin model (KM) olarak adlandırılmıştır.

KM:

$$Min \sum_{t=1}^{T} y_t / T \tag{1}$$

Kısıtlar:

$$y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \ \ , t = 1, \dots, T \tag{2}$$

$$y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0 \ \ , t = 1, \dots, T \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \tag{5}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \ , \ j = 1, \dots, n \tag{6}$$

$$y_t \geq 0 \ , \ t = 1, \dots, T \tag{7}$$

Burada;

İndis seti:

T : İncelenen dönem sayısı
t : T dönem içindeki herhangi bir dönem $t = 1,2, \dots, T$

Parametreler:

r_{jt} : j. hisse senedinin *t*. dönemde gerçekleşen getiri oranı
r_j : j. hisse senedinin ortalama getiri oranı
a_{jt} :*j*. hisse senedinin *t*. dönem ve *T* dönemdeki ortalama getirisi arasındaki farktır. $a_{jt} = r_{jt} - r_j \ , j = 1,2, \dots, n \ , t = 1,2, \dots, T$
u_j : j. hisse senedine yapılan yatırım miktarının üst sınırı
M_0 : Toplam yatırım miktarı
ρ : Beklenen getiri oranı
ρM_0 : Beklenen getiri miktarı

Karar değişkenleri:

x_j : j. hisse senedine ait yatırım payı
y_t : Yardımcı değişken

2.2. Bulanık Beklenen Getiri Oranına Sahip Konno-Yamazaki Modeli
(Konno-Yamazaki Model with Fuzzy Expected Return Rate)

Bulanık mantık, klasik mantığın aksine, "kesin" olmayan veya "belirsiz" durumları ele alabilen bir tür mantık sistemidir. Bulanık mantık, "doğru" veya "yanlış" gibi kesin kategorilere indirgenemeyen birçok durumu ele almak için kullanılır. Bu, gerçek dünyadaki karmaşık ve belirsiz durumları daha iyi modellemek için kullanışlıdır [38].

Bulanık matematiksel programlama, bulanık mantık prensiplerini kullanarak matematiksel programlama problemlerini modelleme ve çözme yöntemidir. Bu yaklaşım, geleneksel matematiksel programlama problemlerine belirsizlik ve kesin olmayan verileri dahil etmek için bulanık mantık kavramlarını kullanır. Bulanık matematiksel programlama, bir karar verme sürecinde belirsizlikle başa çıkmak ve gerçek dünyadaki karmaşık problemleri daha iyi modellemek için kullanılabilir [39-41].

İstenilen hedefe ulaşabilmek için kullanılan bulanık doğrusal programlama modelleri simetrik ve simetrik olmayan modeller olarak ikiye ayrılır. Bellman ve Zadeh tarafından ortaya atılmış simetrik modellerde verilecek olan kararı max-min operatörleriyle tanımlamak mümkündür. Bulanık kümelerle ifade edilebilen amaç fonksiyonu ve kısıtların kesişimi en iyi çözüm dolayısıyla verilecek olan karardır. Simetrik olmayan modellerde ise, bulanık küme kararının belirlenmesinin ardından, amaç fonksiyonu ve kısıtların kesişiminden elde edilen karar göz önünde bulundurularak maksimize karar belirlenmektedir [42-43].

Simetrik programlama modellerinden biri olan Zimmermann'ın modeline göre karar vericinin ulaşmak istediği amaç fonksiyonunun değeri istek seviyesi olarak alınarak, kısıtların her biri bir bulanık küme olarak modellenebilmektedir [42].

Bulanık doğrusal programlama modeli Eş. 8-Eş. 10 ile ifade edilsin.

$$\widetilde{Min}\, z = cx \tag{8}$$

$$(Ax)_t \geq \tilde{b}_t\,, t = 1, \dots, T \tag{9}$$

$$x \geq 0 \tag{10}$$

Eş. 8-Eş. 10 ile verilen bulanık doğrusal programlama modelinde amaç fonksiyonunun ve b_i sağ taraf sabitlerinin bulanık olması durumunda sırasıyla Eş. 11-Eş. 12 ile verilen üyelik fonksiyonları tanımlanır.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0, & cx \geq b_0 + p_0 \\ 1 - [cx - b_0]/p_0 & b_0 \leq cx \leq b_0 + p_0 \\ 1, & cx \leq b_0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\mu_t(x) = \begin{cases} 0, & (Ax)_t < b_t - p_t \\ 1 - [\, b_t - (Ax)_t]/p_t & b_t - p_t \leq (Ax)_t \leq b_t \\ 1, & (Ax)_t \geq b_t \end{cases} \tag{12}$$

Eş. 11-Eş. 12 üyelik fonksiyonları kullanılarak Eş. 8-Eş. 10 ile verilen bulanık doğrusal programlama modeli Eş. 13-Eş. 16 ile verilen modele dönüşür. Burada, b_0 bulanık amaç fonksiyonu değeri, b_t bulanık kaynak değerleri, p_0 ve p_t sırasıyla bulanık amacın ve bulanık kaynakların tolerans değeridir.

$$Max\ \alpha \tag{13}$$

$$\mu_0(x) \geq \alpha \tag{14}$$

$$\mu_t(x) \geq \alpha \quad t = 1,2, \dots, T \tag{15}$$

$$x \geq 0\,, \alpha \in [0,1] \tag{16}$$

Eş. 13-Eş. 16 ile oluşturulan doğrusal programlama problemi optimal çözümü tek olan kesin bir tekniktir [30].

Konno-Yamazaki modelindeki belirsiz parametre olan $\tilde{\rho} M_0$ ile gösterilen beklenen getiri miktarı ve amaç fonksiyonunun bulanık olması durumunda Zimmermann modeli kullanılarak Eş. 1-Eş. 7 ile verilen model Eş. 17-Eş. 20 ile verilen Bulanık Model 1 (BM1)'e dönüşür.

BM1:

$$Max\ \alpha \tag{17}$$

(2-3)

$$1 - [\textstyle\sum_{t=1}^{T} y_t/T - b_0]/p_0 \geq \alpha \tag{18}$$

$$1 - \left[\, \rho M_0 - \textstyle\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \right]/p_1 \geq \alpha \tag{19}$$

(5-7)

$$\alpha \in [0,1] \tag{20}$$

Konno-Yamazaki modelinde sadece $\tilde{\rho} M_0$ beklenen getiri miktarının bulanık olması durumunda Zimmermann modeli kullanılarak Eş. 1-Eş. 7 ile verilen model Bulanık Model 2 (BM2)'e dönüşür.

BM2:

$Min \sum_{t=1}^{T} y_t/T$
(2-3), (19), (5-7), (20)

2.3 Rassal Beklenen Getiri Oranına Sahip Konno-Yamazaki Modeli: Stokastik Programlama
(Konno-Yamazaki Model with Random Expected Return Rate: Stochastic Programming)

Gerçek hayatta, doğrusal programlama olarak modellenen problemlerin çoğunda karşılaşılan genel problemlerden birisi model parametrelerinin uygun değerlerini belirleme güçlüğüdür. Parametreler elde bulunan veriler yardımıyla veya daha önceki çalışmalardan yararlanılarak kesin değerler olarak seçilir ve uygulanana kadar doğruluğu bilinmeyebilir. Bu durum bazen araştırmanın yansızlığını etkileyebilir. Bununla birlikte bu parametreler genellikle önceden bilinmesi mümkün olmayan, rassal değişkenlerin etkisi altında kalmaktadır. Diğer bir ifadeyle modelde bazı veya tüm parametreler rassal değişken olabilir. Kısacası modelde bazı veya tüm parametreler rassal değişken olabilir. Bu tür problemlere stokastik programlama problemleri adı verilir [44].

Stokastik programlamanın çözümünde temel yaklaşım, problemin olasılıksal bir yapıdan deterministik bir yapıya dönüştürülerek bilinen yöntemlerle çözülmesidir. Stokastik programlama tekniklerinden biri olan şans kısıtlı programlama yaklaşımı, rasgele kısıtları belirli seviyelerine göre deterministik duruma getirmeyi amaçlar [45].

Stokastik programlama tekniklerinden biri olan şans kısıtlı programlama, belirsizlik ve rastgele değişkenlerin dikkate alındığı bir matematiksel programlama modelidir. Bu tür problemlerde, gelecekteki olayların olasılık dağılımları göz önüne alınır. Temel amacı, karar vericiye, belirsizlik altında en iyi çözümü bulma veya optimize etme yeteneği sağlamaktır. Belirsizlikleri ve risk toleransını dikkate alarak en iyi kararları vermesine yardımcı olur [46].

Şans kısıtlı programlama problemi rassal verileri içerir ve belirlenen olasılık limitlerine kadar kısıt bozulmalarına izin verir. Doğrusal kısıtlar, kısıtlardaki bozulmaların genişliğini belirten olasılık ölçülerinin kümesiyle birleştiriliyorsa doğrusal programlama modeli şans kısıtlı olacaktır. Kısıtların kısmi bozulmasına izin veren şans kısıtlı programlama problemi, yaklaşık güvenilirliği sağlayan bir yöntem olarak görülebilir. Bu yöntem genelleştirilmiş ve birçok endüstriyel ve ekonomik problemde uygulanmıştır [47]. Ağpak ve Gökçen [48], geleneksel ve U tipi hat dengeleme problemi için stokastik şans kısıtlı 0-1 tamsayı programlama modelleri geliştirmişlerdir. Foroughı ve Gökçen [49], maliyet tabanlı montaj hattı dengeleme problemi için şans kısıtlı programlama modeli önermişlerdir. Borodin vd. [50], tek seviyeli, çok bileşenli stok kontrol problemini, rastgele teslim süreleri altında şans kısıtlı programlama kullanarak deterministik eşdeğer modele dönüştürerek sonuçlar vermişlerdir. Men ve Xu [51] şans kısıtlı stokastik programlamayı kapasiteli araç rotalama problemine uyarlamışlardır. Wang vd. [52], havaalanı yer hareketi optimizasyonu probleminde şans kısıtlı programlamayı kullanmışlardır. Birgören ve Sakallı [53], harmanlama problemi için çok amaçlı şans kısıtlı stokastik programlama modeli önermişlerdir.

Şans kısıtlı doğrusal programlama modeli Eş. 21-Eş. 24 ile verilmiştir.

$$Max(Min)z\,(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{21}$$

$$P\left[b_t \leq \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j\right] \geq 1 - \alpha_t\,,\ t = 1, \dots, T \tag{22}$$

$$x_j \geq 0\,,\ j = 1, \dots, n \tag{23}$$

$$\alpha_t \in (0,1),\ t = 1, \dots, T \tag{24}$$

Burada özel olarak b_t katsayıları bağımsız rassal değişkenlerdir ve α_t'ler seçilmiş olasılıklardır ve $0 < \alpha_t < 1$ dir. x_j karar değişkenlerinin deterministik olduğu varsayılmıştır [44].

Eş. 22 ile verilen şans kısıtının deterministik eşitliği Eş. 25 ile verilmiştir.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \geq E(b_t) + K_{\alpha_t}\sqrt{Var(b_t)}\,,\ t = 1, \dots, T \tag{25}$$

Burada K_{α_t} standart normal değer, $E(b_t)$; b_t rassal değişkeninin beklenen değeri, $Var(b_t)$; b_t rassal değişkeninin varyansıdır.

Beklenen getiri oranını ρ'nun rassal değişken olması durumunda Konno-Yamazaki modelindeki Eş. 4 ile verilen kısıt fonksiyonun şans kısıtı Eş. 26 ile verilir.

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0\right) \geq 1 - \alpha \tag{26}$$

Eş. 22 ile verilen şans kısıtının deterministik eşitliği Eş. 27' dür. Eş. 1-Eş. 7 ile verilen model Stokastik Model'e (SM) dönüşür.

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq E(\rho M_0) + K_\alpha \sqrt{Var(\rho M_0)} \tag{27}$$

Burada $E(\rho M_0)$ ve $Var(\rho M_0)$ sırasıyla ρM_0 rassal değişkeninin beklenen değeri ve varyansıdır. M_0 pozitif reel sayıdır.

SM:

$$Min \sum_{t=1}^{T} y_t / T$$

(2-3), (27), (5-7), (20)

3. Belirsiz Beklenen Getiri Oranları ile Portföy Optimizasyonu Uygulaması
(Application of Portfolio Optimization with Uncertain Expected Rates of Return)

Çalışma kapsamında BIST 50'de 30.10.2023 ve 01.12.2023 tarihleri arasında işlem görmüş olan 50 hisse senedine ait verilerin günlük kapanış fiyatları verileri elde edilmiştir. Beklenen getiri oranının belirsiz olduğu varsayımı altında bu parametrenin bulanık ve normal dağılıma sahip rassal değişken olması durumlarına göre iki farklı model çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada ele alınan zaman aralığı 25 gün olup kısıtlı bir süreyi içerse de modellerin geçerliliği ve doğruluğunu test etmek için yeterlidir. Büyük boyutlu problemler için de önerilen modellerde de rahatlıkla kullanılabilir. Uygulamada izlenen adımların iş akışı Şekil 1'de verilmiştir.

İş akışında belirtilen adımlar ayrıntılı olarak aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Adım 1: Ortalama getiri oranlarını, ortalamadan sapmayı hesapla.

Çalışmada ilk olarak 02.10.2023 tarihi başlangıç alınarak BIST 50 kapsamındaki hisse senetlerine ait 25 adet kapanış fiyatı alınmıştır. İlgili dönemde kar payı ödemesi ve hisse senedi bölünmesi gibi hisse senedi fiyatını ve dolayısıyla getirileri dışsal olarak değiştiren etmenler bulunmamaktadır. Buna bağlı olarak, j. hisse senedinin $t +$ 1. dönem sonundaki getiri oranı Eş. 28 ile hesaplanmıştır.

$$r_{j(t+1)} = \frac{k_{j(t+1)} - k_{jt}}{k_{jt}}\ , j = 1, \dots, n\,, t = 1, \dots, T - 1 \tag{28}$$

burada k_{jt}; j. hisse senedinin t. dönemdeki kapanış fiyatıdır. j. hisse senedinin T dönemdeki ortalama getiri oranı Eş. 29 ile hesaplanmıştır.

$$r_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_{j(t+1)}}{T} \tag{29}$$

Ortalama getiri oranlarının ortalamaları Eş. 30 ile verilmiştir.

$$\bar{r} = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j}{n} \tag{30}$$

j. hisse senedinin T dönemdeki ortalama getiri oranlarının standart sapması Eş. (31) ile hesaplanır.

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(r_j - \bar{r}\right)^2} \tag{31}$$

j. hisse senedinin t. dönemde gerçekleşen getiri oranı ile ortalama getiri oranı arasındaki fark Eş. (32) ile verilmiştir.

$$a_{jt} = r_{jt} - r_j\ , j = 1,2, .., n\,, t = 1,2, .., T \tag{32}$$

Adım 2: BM1 ve BM2: *Bulanık Konno-Yamazaki modellerinin çözümü: Beklenen getiri oranları için tolerans değerini bul.*

50 hisse senedinin, 25 günlük dönemi için ortalama getiri oranlarının ortalamaları hesaplanmıştır. %95 güven düzeyinde beklenen getiri oranlarının ortalaması için güven aralığı [-0,000557; 0,001861] olup güven aralığının uzunluğu 0,002418 olarak elde edilmiş ve bu değer bulanık matematiksel modelde güven aralığının uzunluğu, p_1 tolerans değeri olarak alınmıştır. Beklenen getiri oranına ait üyelik fonksiyonu Şekil 2'de verilmiştir.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{t=1}^{24} y_t/24 < z_L \\ 1 - \frac{[\sum_{t=1}^{24} y_t/24] - z_L}{z_U - z_L}, & z_L \leq \sum_{t=1}^{24} y_t/24 \leq z_U \\ 0, & \sum_{t=1}^{24} y_t/24 > z_U \end{cases} \tag{33}$$

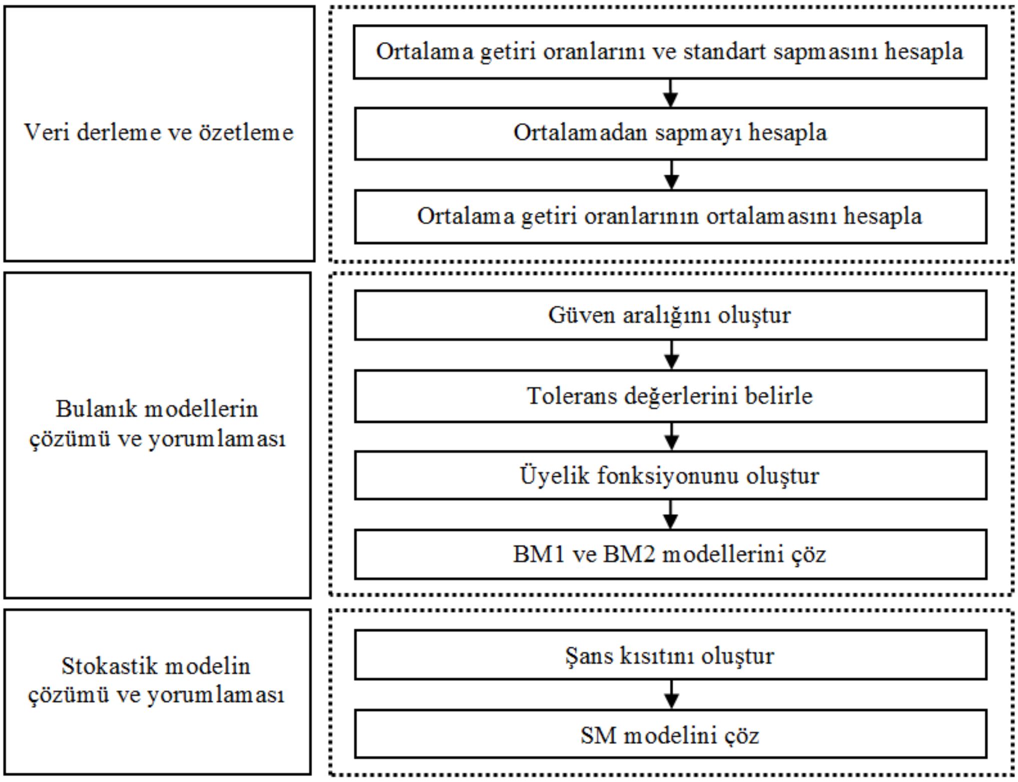
Eş. 33 ile riske ait üyelik fonksiyonu verilmiş olup burada, z_L kesin model sonucunda elde edilen amaç fonksiyonu değeridir z_U ise kesin model sonucunda elde edilen maksimum risk değeridir.

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0, \sum_{j=1}^{50} r_j x_j < -0{,}000557 * M_0 \\ 1 - \frac{0{,}001861 * M_0 - \sum_{j=1}^{50} r_j x_j}{[0{,}001861 * M_0] - [-0{,}000557 * M_0]}, \\ -0{,}000557 * M_0 \leq \sum_{j=1}^{50} r_j x_j \leq 0{,}001861 * M_0 \\ 1, \quad \sum_{j=1}^{50} r_j x_j > 0{,}001861 * M_0 \end{cases} \tag{34}$$

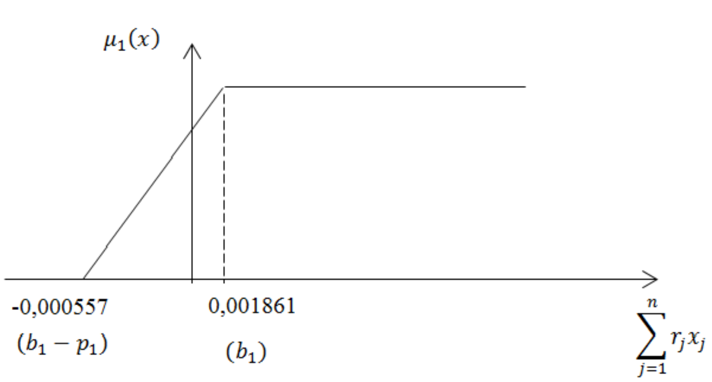
Eş. 34 getiriye ait üyelik fonksiyonu olup, burada M_0 değeri 100 alınmıştır. Eş. 17-Eş. 20 ile verilen model çözülerek, bulanık modelin çözümleri elde edilmiş ve BM1 ve BM2 model çözümleri Tablo 1 ile verilmiştir.

Adım 3: SM: Stokastik Konno-Yamazaki model çözümü: Ortalama getiri oranlarının ortalamalarını ve standart sapmalarını hesapla

Ortalama getiri oranlarının ortalamaları Eş. 30 ve standart sapması Eş. 31 ile hesaplanır. $\bar{r} = 0{,}000652$ ve $S = 0{,}004229$ olarak



Şekil 1. Uygulamada izlenen adımların iş akışı (Workflow of steps followed in the application)



Şekil 2. Beklenen getiri oranına ait üyelik fonksiyonu (Membership function of the expected rate of return)

Tablo 1. KM, BM1, BM2 ve SM çözümleri (KM, BM1, BM2 and SM solutions)

Model	Hisse Senedine Yapılan Yatırım Oranları													
	X3	X4	X7	X9	X16	X22	X23	X26	X31	X36	X37	X39	X42	X46
KM	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
BM1	2,083	6,818	-	4,269	23,119	1,999	19,204	9,860	5,451	-	9,627	10,593	6,977	-
	5,097	4,581	-	5,411	26,428	-	6,249	8,897	5,353	2,918	14,983	13,157	4,577	2,349
	4,933	7,711	-	0,974	20,748	5,887	24,662	11,826	4,548	-	3,831	8,365	6,515	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
BM2	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	-	-	-	3,612	25,817	17,670	-	5,886	-	-	18,870	-	13,417	14,728
	-	-	-	12,024	30,511	3,193	-	7,598	5,668	-	19,476	6,433	7,988	7,109
	6,751	1,904	-	6,072	26,499	-	0,087	6,971	6,721	7,072	15,654	14,747	4,955	2,567
	3,176	7,121	-	2,945	22,347	3,356	21,003	10,457	5,182	-	7,680	9,964	6,769	-
SM	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-
	5,301	8,946	1,400	1,052	19,848	5,307	22,913	15,809	2,706	-	3,381	8,142	5,195	-

Model	Alfa (α)	Hisse Senedi Sayısı	Getiri	Risk (Ortalama Mutlak Sapma)	Modifiye Sharpe Oranı*
KM	-	12	0,123045	0,631330	0,193552
BM1	0,99	11	0,185432	0,636671	0,289917
	0,1	12	0,254244	0,646018	0,392240
	0,2	11	0,147776	0,632396	0,232332
	0,3	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,4	12	0,123045	0,631330	0,193552
BM2	0,5	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,6	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,7	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,8	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,9	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,1	7	0,607378	0,803515	0,754843
	0,2	9	0,421124	0,693810	0,605748
	0,3	12	0,286973	0,652542	0,438474
	0,4	11	0,172320	0,635120	0,269980
SM	0,5	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,6	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,7	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,8	12	0,123045	0,631330	0,193552
	0,9	12	0,123045	0,631330	0,193552

*Risksiz faiz oranı %0,085 alınmıştır.
Kaynak: https://www.tcmb.gov.tr/wps/wcm/connect/TR/TCMB+TR/ Main+Menu/Istatistikler/Piyasa+Verileri/ihale+Yontemi+ ile+ Satilan +Hazine+Bonolari +ve+Devlet+Tahvilleri/

bulunmuştur. İstatistiksel hesaplamalar için SPSS 26 paket programı kullanılmıştır. SM modeli çözülerek sonuçlar Tablo 1 ile verilmiştir.

Tablo 1 ile verilen sonuçlar incelendiğinde KM olan Konno-Yamazaki modelinin çözüm sonuçlarına göre 50 hisse senedinden 12 tanesine atama yapıldığı gözlenmektedir. Bu model çözümüne göre beklenen getiri miktarı 0,123045 olup katlanılması gereken riskin 0,631330 olduğu görülmektedir. BM1'de beklenen getiri miktarının 0,185432'a çıktığı buna bağlı olarak risk değerinin arttığı izlenmiştir. Burada yine 50 hisse senedinden 11'ine yatırım yapılması gerektiği ortaya çıkar. Her iki modelde farklı sayıda hisse senedine yatırım yapılması gerektiğinin yanı sıra model sonuçları incelendiğinde, hisse senetlerine yatırım yapılan oranların da değiştiği gözlenmiştir. İkinci bulanık model olan BM2'nin çözüm sonuçları incelendiğinde, alfa değeri arttıkça beklenen getiri ve risk değerlerinin düştüğü gözlenmiştir. Yatırım yapılacak hisse senetleri sayıları değişmektedir. Aynı gözlemler SM için de geçerlidir. SM için dikkat edilmesi gereken bir sonuç ise alfanın 0,5 değeri için model KM ile aynı sonucu vermektedir. Bu da beklenen bir sonuçtur.

Modeller bazında yatırım yapılan hisse senetlerinin ve yatırım oranlarının farklılaştığı gözlenmektedir. Yatırım oranları incelendiğinde, KM en yüksek yatırımı X23 hisse senedine 22,913 oranında yapmıştır. Bu model toplamda 12 hisse senedine yatırım yapmış olup, en az oranda yatırımını X9 ile 1,052 oranında yapmıştır. BM1 X16 hisse senedine 23,119 oranında bir yatırım yapmış olup, en düşük yatırımını 1,999 ile X22'ye yapmış olmasına rağmen bu model çözümünde KM'den farklı olarak, X7 hisse senedine yatırım yapmamıştır. BM2 sonuçları incelendiğinde, $\alpha = 0{,}3$ için KM sonuçlarındaki aynı oranlar elde edilmiştir. Bununla birlikte α'nın 0,4 ve daha büyük değerleri için hisse senedine yatırım oranlarının sabitlendiği görülmektedir. Bu model çözümleri SM çözümlerindeki α'nın 0,5 ve daha büyük değerleri için aynı sonuçları verdiği dikkat çekmektedir.

Yatırımcılar riske karşı tutumlarına göre 3 sınıfa ayrılırlar bunlar riskten kaçınan, risk arayan ve riske karşı nötr yatırımcılardır. Tablo 1 ile verilen sharpe oranlarına göre riskten kaçınan yatırımcı KM ile aynı sharpe oranına sahip BM2 ($\alpha = 0,3$ - $\alpha = 0,9$) ve SM ($\alpha = 0,5$ - $\alpha = 0,9$) model sonuçlarını kullanarak yatırım yapabilirler. Bu sonuçlarda risk en düşük değere sahiptir ve buna bağlı olarak da sharpe oranı en küçüktür (0,193552). Risk arayan yatırımcı, sharpe oranı en yüksek (0,754843) olan SM ($\alpha = 0,1$) sonuçlarına göre yatırım yapmalıdır. Bu modelde risk ve getiri de en yüksek değere sahiptir. Riske karşı nötr olan yatırımcı ise, BM1, BM2 ($\alpha = 0,1$ - $\alpha = 0,3$) ve SM ($\alpha = 0,1$ - $\alpha = 0,4$) sonuçlarına ait herhangi birini kullanarak hisse senedi alımı yapabilirler.

Ayrıca BM2'de farklı alfa değerlerinde, beklenen getiri ve risk değerleri arasında 0,952'lik bir pozitif korelasyon olduğu gözlenmiştir. Pearson korelasyon değeri 0,05 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır ($p<0,05$). Aynı şekilde SM'de farklı alfa değerlerinde, beklenen getiri ve risk değerleri arasında 0,959'lik bir pozitif korelasyon olduğu gözlenmiştir. Pearson korelasyon değeri 0,05 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır ($p<0,05$). Buna bağlı olarak beklenen getiri oranı yükseldikçe yatırımcının katlanacağı risk oranı artmaktadır. Tüm gözlenen bu sonuçların genelleştirilebilmesi için Bölüm 4'de farklı test problemleri oluşturulmuş ve gözlenen bu sonuçlar incelenmiştir.

Bu çalışma kapsamında geliştirilen modeller sayesinde yatırımcılara farklı portföy seçenekleri oluşturulmuştur. Yatırımcılar bu seçenekleri inceleyerek beklenen getirilerini ve katlanmaları gereken risk değerlerini de gözlemleyerek seçimler yapabilirler. Alternatif seçeneklere sahip olan yatırımcı kendi lehine olacak şekilde karar verebilme ayrıcalığına sahip olacaktır.

4. Modellerin Sayısal Analizleri ve Yorumlanması
(Numerical Analysis and Interpretation of Models)

Konno-Yamazaki modelinin bulanık ve stokastik programlamaya dayanarak çözülen sonuçları incelemek amacıyla BM1, BM2 ve SM modellerinin parametrelerini oluşturan j. hisse senedinin t. dönem sonundaki getiri oranı rasgele üretilerek yeni problem setleri oluşturulmuştur. İlk olarak parametreleri, ortalaması 0 ve standart sapması 0,01 olan normal dağılımdan rasgele üretilen 15 problem seti (P1) ele alınmıştır. İkinci olarak yayılımın farklılaşmasının sonuçlara olan etkisini gözlemek amacıyla ikinci bir problem seti parametreleri ortalaması 0 ve standart sapması 0,05 olan normal dağılımdan rasgele üretilen 15 sette (P2) aynı parametre için üretim gerçekleştirilmiştir. Toplamda 30 farklı problem oluşturulmuştur. Bu 30 problem için kesin model (KM) sonuçları, BM1 sonuçları ve hem BM2 hem de SM sonuçlarına ait (0,1) aralığındaki her alfa için 0,1 artış ele alınarak çözülen modellerin sonuçları Tablo 2 ve Tablo 3 ile verilmiştir. Buna göre toplamda 600 problem çözülmüştür. Tablo 2 ve Tablo 3 sırasıyla P1 ve P2 problem setlerine ait KM, BM1, BM2 ve SM modellerinin çözümü ile elde edilen beklenen getiri ve risk değerlerini göstermektedir. Ayrıca KM, BM1, BM2 ve SM modellerinin çözümü ile elde edilen her modelin 50 hisse senedinden kaç tanesine yatırım yapıldığını gösteren bilgiler Tablo 4 ile verilmiştir.

Tablo 2 ile verilen 15 farklı P1 problemlerine ait KM, BM1, BM2 ve SM modellerinin çözüm sonuçları incelendiğinde yatırımcıların katlanmaları gereken riskler karşılığında beklenen getiri miktarlarının farklılaştığı görülmektedir. KM sonuçlarına bakıldığında risk değeri 0 olan P1_14 ve P1_15 problemlerinde en büyük getiri 0,020844 ile P1_15 problemine aittir. Bu probleme ait BM1 ve BM2 modelleri ile aynı getiri ve risk değerleri elde edilmiştir. Ancak SM sonuçları aynı problem bazında incelendiğinde $\alpha = 0,4$ için aynı sonuç elde edilmesine rağmen $\alpha = 0,1$ için 0,053317'luk bir risk değerine katlanabilen yatırımcı için beklenen getirinin 0,130920 olduğu gözlenmektedir. Bu da risk almayı kabul eden bir yatırımcının bu risk karşılığında getirisini yükseltebileceği anlamına gelmektedir. Bu sonuç stokastik modelin üstünlüğünü ortaya koymaktadır.

P1_1 problemi incelendiğinde KM için risk değeri 0,006392 olan yatırımın -0,010520 ile negatif bir getiriye sahip olduğu bir portföy oluşmuştur. Yatırımcı BM1 modeli ile elde edilen sonuçları kullanırsa yaklaşık aynı orana sahip olan 0,009236'lik bir riske katlanarak getiri oranını 0,025680'e yükseltebilmektedir. Aynı problem için BM2 modeli 0,015212 risk oranında getiriyi 0,052509'e yükselten bir portföy sunmuştur. SM ise 0,094555 riske katlanabilen bir yatırımcıya 0,170243'lik bir getiri önermektedir. Tüm sonuçlar incelendiğinde risk değerlerinin yükselmesi ile getiri oranlarının da yükseldiği görülmektedir.

Tablo 3 ile verilen 15 farklı P2 problemlerine ait KM, BM1, BM2 ve SM modellerinin çözüm sonuçları incelendiğinde benzer sonuçlar gözlenmektedir. Bu problemlerin parametreleri standart sapması 0,05 olan normal dağılımdan üretildiğinden yayılım daha büyük olup getiri ve risk değerlerinin mutlak değerce daha büyük değerler olduğu gözlenmiştir. Bu da beklenen bir sonuçtur.

Tablo 2. P1 Test problemlerinin KM, BM1, BM2 ve SM Çözümleri (KM, BM1, BM2 and SM Solutions of P1 test problems)

	KM		BM1		
P. No	Getiri	Risk	Alfa	Getiri	Risk
P1_1	-0,010520	0,006392	0,949126	0,025680	0,009236
P1_2	-0,004958	0,000001	0,641906	-0,004775	0,000007
P1_3	0,012677	0,007961	0,990951	0,025005	0,008326
P1_4	0,056018	0,000003	1,000	0,056018	0,000003
P1_5	-0,010866	0,001655	0,898798	0,023400	0,003338
P1_6	-0,026108	0,003252	0,982972	0,007266	0,003806
P1_7	0,020558	0,001375	0,827735	0,044669	0,003746
P1_8	0,011150	0,001818	0,935016	0,036878	0,002995
P1_9	0,021982	0,000881	0,782287	0,043889	0,002818
P1_10	0,028341	0,001664	0,933916	0,051575	0,002769
P1_11	-0,037220	0,000911	0,764137	-0,015233	0,003081
P1_12	0,020656	0,000001	0,665525	0,032181	0,000009
P1_13	0,029360	0,008476	0,997434	0,043581	0,008693
P1_14	-0,005994	0,000000	0,978577	-0,005994	0,000000
P1_15	0,020844	0,000000	1,000000	0,020844	0,000000

Tablo 2 (devam). P1 Test problemlerinin KM, BM1, BM2 ve SM Çözümleri (KM, BM1, BM2 and SM Solutions of P1 test problems)

	BM2		SM	
P. No	Getiri	Risk	Getiri	Risk
P1_1	MaxG: 0,052509 / α:0,1	MaxR: 0,015212 / α:0,1	MaxG: 0,170243 / α:0,1	MaxR: 0,094555 / α:0,1
	MinG: -0,067511 / α:0,6	MinR: 0,005732 / α:0,6	MinG: -0,067511 / α:0,7	MinR: 0,005732 / α:0,7
P1_2	MaxG: 0,040991 / α:0,1	MaxR: 0,008097 / α:0,1	MaxG: 0,145435 / α:0,1	MaxR: 0,070475 / α:0,1
	MinG: -0,004958 / α:0,3	MinR: 0,000001 / α:0,3	MinG: -0,004958 / α:0,5	MinR: 0,000001 / α:0,5
P1_3	MaxG: 0,041429 / α:0,1	MaxR: 0,013055 / α:0,1	MaxG: 0,123851 / α:0,1	MaxR: 0,099609 / α:0,1
	MinG: 0,012677 / α:0,3	MinR: 0,007961 / α:0,3	MinG: 0,012677 / α:0,5	MinR: 0,007961 / α:0,5
P1_4	MaxG: 0,065200 / α:0,1	MaxR: 0,000003 / α:0,1	MaxG: 0,177369 / α:0,1	MaxR: 0,077801 / α:0,1
	MinG: 0,056018 / α:0,2	MinR: 0,000003 / α:0,2	MinG: 0,056018 / α:0,4	MinR: 0,000003 / α:0,4
P1_5	MaxG: 0,056324 / α:0,1	MaxR: 0,009180 / α:0,1	MaxG: 0,181831 / α:0,1	MaxR: 0,070300 / α:0,1
	MinG: -0,097914 / α:0,7	MinR: 0,000209 / α:0,7	MinG: -0,097914 / α:0,8	MinR: 0,000209 / α:0,8
P1_6	MaxG: 0,027930 / α:0,1	MaxR: 0,004726 / α:0,1	MaxG: 0,128869 / α:0,1	MaxR: 0,058316 / α:0,1
	MinG: -0,038011 / α:0,4	MinR: 0,003209 / α:0,4	MinG: -0,038011 / α:0,6	MinR: 0,003209 / α:0,6
P1_7	MaxG: 0,078091 / α:0,1	MaxR: 0,010540 / α:0,1	MaxG: 0,185558 / α:0,1	MaxR: 0,061951 / α:0,1
	MinG: 0,013868 / α:0,4	MinR: 0,000943 / α:0,4	MinG: 0,013868 / α:0,6	MinR: 0,000943 / α:0,6
P1_8	MaxG: 0,057400 / α:0,1	MaxR: 0,003986 / α:0,1	MaxG: 0,143792 / α:0,1	MaxR: 0,088372 / α:0,1
	MinG: -0,024111 / α:0,6	MinR: 0,001091 / α:0,6	MinG: -0,024111 / α:0,7	MinR: 0,001091 / α:0,7
P1_9	MaxG: 0,082669 / α:0,1	MaxR: 0,008407 / α:0,1	MaxG: 0,196029 / α:0,1	MaxR: 0,062665 / α:0,1
	MinG: 0,006820 / α:0,4	MinR: 0,000562 / α:0,4	MinG: 0,006820 / α:0,6	MinR: 0,000562 / α:0,6
P1_10	MaxG: 0,074446 / α:0,1	MaxR: 0,006369 / α:0,1	MaxG: 0,170426 / α:0,1	MaxR: 0,085694 / α:0,1
	MinG: 0,028341 / α:0,3	MinR: 0,001664 / α:0,3	MinG: 0,028341 / α:0,5	MinR: 0,001664 / α:0,5
P1_11	MaxG: 0,027873 / α:0,1	MaxR: 0,014511 / α:0,1	MaxG: 0,149462 / α:0,1	MaxR: 0,093518 / α:0,1
	MinG: -0,064566 / α:0,5	MinR: 0,000002 / α:0,5	MinG: 0,028341 / α:0,5	MinR: 0,001664 / α:0,5
P1_12	MaxG: 0,075107 / α:0,1	MaxR: 0,006583 / α:0,1	MaxG: 0,176817 / α:0,1	MaxR: 0,050829 / α:0,1
	MinG: 0,009841 / α:0,4	MinR: 0,000000 / α:0,4	MinG: -0,064566 / α:0,6	MinR: 0,000002 / α:0,6
P1_13	MaxG: 0,062779 / α:0,1	MaxR: 0,009746 / α:0,1	MaxG: 0,161330 / α:0,1	MaxR: 0,051874 / α:0,1
	MinG: 0,029360 / α:0,3	MinR: 0,008476 / α:0,3	MinG: 0,029360 / α:0,5	MinR: 0,008476 / α:0,5
P1_14	MaxG: 0,014174 / α:0,1	MaxR: 0,004537 / α:0,1	MaxG: 0,111261 / α:0,1	MaxR: 0,069330 / α:0,1
	MinG: -0,005994 / α:0,2	MinR: 0,000000 / α:0,2	MinG: -0,005994 / α:0,4	MinR: 0,000000 / α:0,4
P1_15	MaxG: 0,027493 / α:0,1	MaxR: 0,000002 / α:0,1	MaxG: 0,130920 / α:0,1	MaxR: 0,053317 / α:0,1
	MinG: 0,020844 / α:0,2	MinR: 0,000000 / α:0,2	MinG: 0,020844 / α:0,4	MinR: 0,000000 / α:0,4

Tablo 3. P2 Test problemlerinin KM, BM1, BM2 ve SM Çözümleri (KM, BM1, BM2 and SM Solutions of P2 test problems)

	KM		BM1		
P. No	Getiri	Risk	Alfa	Getiri	Risk
P2_1	0,055410	0,032453	0,953786	0,224913	0,047445
P2_2	0,220466	0,003587	0,984049	0,231930	0,004159
P2_3	0,151225	0,000003	0,994881	0,151225	0,000003
P2_4	-0,006493	0,000000	1,000000	-0,006493	0,000000
P2_5	-0,141931	0,000000	0,721506	-0,141931	0,000000
P2_6	-0,112302	0,010778	0,844530	0,011046	0,027542
P2_7	-0,308194	0,010213	0,884334	-0,170601	0,022033
P2_8	-0,004971	0,000000	1,000000	-0,004971	0,000000
P2_9	-0,151982	0,000000	1,000000	-0,151982	0,000000
P2_10	-0,194647	0,000005	0,988131	-0,100024	0,000006
P2_11	0,186908	0,000000	1,000000	0,186908	0,000000
P2_12	-0,154844	0,005046	0,954796	-0,117084	0,007329
P2_13	0,420299	0,000000	1,000000	0,420299	0,000000
P2_14	-0,030882	0,000000	1,000000	-0,030882	0,000000
P2_15	-0,347212	0,008543	0,876564	-0,225078	0,019099

P1 ve P2 problem setlerinin tüm sonuçları gözlendiğinde KM ile elde edilen sonuçlarda riski 0 olan ancak getirisi negatife düşen çözümler elde edilmiştir. Bu durum KM in zayıflığı olarak nitelendirilebilir. Önerilen bulanık ve stokastik modeller bu zayıflığı ortadan kaldıran alternatif portföy seçenekleri ortaya koymakta bu nedenle önerilen modeller literatüre katkı sağlayıcı nitelikte olup gerçek hayat problemlerinde yatırımcılara daha kazançlı portföy seçenekleri önermektedir.

Tablo 4 ile tüm problemler bazında modellere ait yatırım yapılan hisse senetleri sayıları verilmiştir. Hangi hisse senede ne oranda yatırım yapıldığı model çözümlerinin sonucunda bulunmuş ancak 600 probleme ait bu sonuçların tablolar halinde sunulması mümkün olmamıştır. Sonuçlar incelendiğinde, problemlerin aynı sayıda hisse senedine yatırım yapmayı önermesine rağmen modeller değiştikçe yatırım yapılan oranlarda değişiklikler olabilmektedir. Aynı sayıda hisse senedi olmasına rağmen bu hisse senetleri de farklı hisse senetleri olabilmektedir. Tablo 4 ile verilen BM2 çözüm sonuçlarına göre, farklı α'lar için yatırım yapılan hisse senedi sayılarının ortalamaları arasında 0,05 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak fark gözlenmemiştir ($p>0,05$). Hata terimleri normal dağılıma uygunluk sağlamadığı için fark kontrolü olarak parametrik olmayan testlerden Kruskal Wallis testi uygulanmıştır ($p>0,05$). Normallik kontrolleri ise Kolmogorov Smirnov test istatistiği ile yapılmıştır. SM

Tablo 3 (devam). P2 Test problemlerinin KM, BM1,BM2 ve SM Çözümleri (KM, BM1, BM2 and SM Solutions of P2 test problems)

	BM2		SM	
P. No	Getiri	Risk	Getiri	Risk
P2_1	MaxG: 0,347511 / α:0,1	MaxR: 0,073681 / α:0,1	MaxG: 0,893137 / α:0,1	MaxR: 0,397357 / α:0,1
	MinG: -0,089853 / α:0,5	MinR: 0,030272 / α:0,5	MinG: -0,089853 / α:0,6	MinR: 0,030272 / α:0,6
P2_2	MaxG: 0,327282 / α:0,1	MaxR: 0,016202 / α:0,1	MaxG: 0,794753 / α:0,1	MaxR: 0,301048 / α:0,1
	MinG: 0,220466 / α:0,2	MinR: 0,003587 / α:0,2	MinG: 0,220466 / α:0,4	MinR: 0,003587 / α:0,4
P2_3	MaxG: 0,206983 / α:0,1	MaxR: 0,000003 / α:0,1	MaxG: 0,587965 / α:0,1	MaxR: 0,153817 / α:0,1
	MinG: 0,151225 / α:0,2	MinR: 0,000003 / α:0,2	MinG: 0,151225 / α:0,4	MinR: 0,000003 / α:0,4
P2_4	MaxG: -0,006493 / α:0,1	MaxR: 0,000000 / α:0,1	MaxG: 0,401452 / α:0,1	MaxR: 0,337886 / α:0,1
	MinG: -0,006493 / α:0,1	MinR: 0,000000 / α:0,1	MinG: -0,006493 / α:0,3	MinR: 0,000000 / α:0,3
P2_5	MaxG: 0,086047 / α:0,1	MaxR: 0,021731 / α:0,1	MaxG: 0,680192 / α:0,1	MaxR: 0,503050 / α:0,1
	MinG: -0,141931 / α:0,3	MinR: 0,000000 / α:0,3	MinG: -0,141931 / α:0,5	MinR: 0,000000 / α:0,5
P2_6	MaxG: 0,167668 / α:0,1	MaxR: 0,058771 / α:0,1	MaxG: 0,690635 / α:0,1	MaxR: 0,327827 / α:0,1
	MinG: -0,255621 / α:0,5	MinR: 0,002251 / α:0,5	MinG: -0,255621 / α:0,6	MinR: 0,002251 / α:0,6
P2_7	MaxG: -0,028236 / α:0,1	MaxR: 0,050266 / α:0,1	MaxG: 0,494709 / α:0,1	MaxR: 0,315984 / α:0,1
	MinG: -0,607555 / α:0,7	MinR: 0,000000 / α:0,7	MinG: -0,607555 / α:0,7	MinR: 0,000000 / α:0,7
P2_8	MaxG: 0,000150 / α:0,1	MaxR: 0,000001 / α:0,1	MaxG: 0,513307 / α:0,1	MaxR: 0,438212 / α:0,1
	MinG: -0,004971 / α:0,2	MinR: 0,000000 / α:0,2	MinG: -0,004971 / α:0,4	MinR: 0,000000 / α:0,4
P2_9	MaxG: -0,080423 / α:0,1	MaxR: 0,010455 / α:0,1	MaxG: 0,432908 / α:0,1	MaxR: 0,301577 / α:0,1
	MinG: -0,151982 / α:0,2	MinR: 0,000000 / α:0,2	MinG: -0,151982 / α:0,4	MinR: 0,000000 / α:0,4
P2_10	MaxG: 0,039764 / α:0,1	MaxR: 0,002952 / α:0,1	MaxG: 0,734603 / α:0,1	MaxR: 0,118362 / α:0,1
	MinG: -0,194647 / α:0,2	MinR: 0,000005 / α:0,2	MinG: -0,194647 / α:0,5	MinR: 0,000005 / α:0,5
P2_11	MaxG: 0,186908 / α:0,1	MaxR: 0,000000 / α:0,1	MaxG: 0,527126 / α:0,1	MaxR: 0,072521 / α:0,1
	MinG: 0,186908 / α:0,1	MinR: 0,000000 / α:0,1	MinG: 0,186908 / α:0,3	MinR: 0,000000 / α:0,3
P2_12	MaxG: 0,016811 / α:0,1	MaxR: 0,026602 / α:0,1	MaxG: 0,614553 / α:0,1	MaxR: 0,271256 / α:0,1
	MinG: -0,154844 / α:0,2	MinR: 0,005046 / α:0,2	MinG: -0,154844 / α:0,5	MinR: 0,005046 / α:0,5
P2_13	MaxG: 0,420299 / α:0,1	MaxR: 0,000000 / α:0,1	MaxG: 0,945073 / α:0,1	MaxR: 0,270502 / α:0,1
	MinG: 0,420299 / α:0,1	MinR: 0,000000 / α:0,1	MinG: 0,420299 / α:0,3	MinR: 0,000000 / α:0,3
P2_14	MaxG: 0,031936 / α:0,1	MaxR: 0,013167 / α:0,1	MaxG: 0,485540 / α:0,1	MaxR: 0,334240 / α:0,1
	MinG: -0,030882 / α:0,2	MinR: 0,000000 / α:0,2	MinG: -0,030882 / α:0,4	MinR: 0,000000 / α:0,4
P2_15	MaxG: -0,093581 / α:0,1	MaxR: 0,066992 / α:0,1	MaxG: 0,380187 / α:0,1	MaxR: 0,449728 / α:0,1
	MinG: -0,544747 / α:0,6	MinR: 0,002245 / α:0,6	MinG: -0,544747 / α:0,7	MinR: 0,002245 / α:0,7

Tablo 4. Yatırım yapılan hisse senedi sayıları (Number of stocks invested)

	KM	BM1	BM2								
P. No			α=0,1	α=0,2	α=0,3	α=0,4	α=0,5	α=0,6	α=0,7	α=0,8	α=0,9
P1_1	20	18	19	20	20	21	21	20	20	20	20
P1_2	22	22	20	22	22	22	22	22	22	22	22
P1_3	19	19	18	19	19	19	19	19	19	19	19
P1_4	22	23	23	22	22	22	22	22	22	22	22
P1_5	22	21	20	21	22	21	22	22	21	21	21
P1_6	21	21	22	21	21	20	20	20	20	20	20
P1_7	21	22	21	22	21	20	20	20	20	20	20
P1_8	21	20	21	20	21	22	22	21	21	21	21
P1_9	22	22	21	22	22	21	21	21	21	21	21
P1_10	21	21	22	21	21	21	21	21	21	21	21
P1_11	22	21	18	21	22	23	22	22	22	22	22
P1_12	23	22	20	21	23	23	23	23	23	23	23
P1_13	19	18	20	20	19	19	19	19	19	19	19
P1_14	23	23	22	23	23	23	23	23	23	23	23
P1_15	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_1	21	21	19	22	21	20	20	20	20	20	20
P2_2	21	22	22	21	21	21	21	21	21	21	21
P2_3	22	22	23	22	22	22	22	22	22	22	22
P2_4	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_5	23	23	21	21	23	23	23	23	23	23	23
P2_6	22	21	19	21	22	22	21	21	21	21	21
P2_7	22	21	20	21	22	22	22	22	22	22	22
P2_8	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_9	23	23	20	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_10	22	23	22	23	22	22	22	22	22	22	22
P2_11	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_12	20	21	21	20	20	20	20	20	20	20	20
P2_13	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_14	23	23	22	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_15	22	22	20	22	22	22	22	21	21	21	21

çözüm sonuçlarına göre farklı α'lar için yatırım yapılan hisse senedi sayılarının ortalamaları arasında 0,05 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak fark anlamlı bulunmuştur (p<0,05) ve çözüm sonuçlarına ilişkin tanıtıcı istatistikleri Tablo 5 ile verilmiştir. İkili karşılaştırmalar için parametrik olmayan testlerden Mann-Whitney U testi uygulanmış ve sonuçlar Tablo 6 ile sunulmuştur.

Tablo 4 (devam). Yatırım yapılan hisse senedi sayıları (Number of stocks invested)

	SM								
P. No	α=0,1	α=0,2	α=0,3	α=0,4	α=0,5	α=0,6	α=0,7	α=0,8	α=0,9
P1_1	12	16	18	18	20	21	20	20	20
P1_2	11	18	19	22	22	22	22	22	22
P1_3	9	17	19	19	19	19	19	19	19
P1_4	10	19	23	22	22	22	22	22	22
P1_5	12	18	20	21	22	22	22	21	21
P1_6	15	19	21	21	21	20	20	20	20
P1_7	12	18	21	21	21	20	20	20	20
P1_8	11	15	20	20	21	22	21	21	21
P1_9	13	18	20	22	22	21	21	21	21
P1_10	11	16	22	21	21	21	21	21	21
P1_11	11	15	17	21	22	22	22	22	22
P1_12	12	17	20	20	23	23	23	23	23
P1_13	14	18	20	18	19	19	19	19	19
P1_14	11	18	21	23	23	23	23	23	23
P1_15	12	19	23	23	23	23	23	23	23
P2_1	14	18	21	21	21	20	20	20	20
P2_2	12	20	22	21	21	21	21	21	21
P2_3	14	21	23	22	22	22	22	22	22
P2_4	12	18	23	23	23	23	23	23	23
P2_5	11	17	21	21	23	23	23	23	23
P2_6	13	15	17	19	22	21	21	21	21
P2_7	12	16	20	21	22	22	22	22	22
P2_8	11	20	22	23	23	23	23	23	23
P2_9	13	18	20	23	23	23	23	23	23
P2_10	17	21	22	23	22	22	22	22	22
P2_11	17	23	23	23	23	23	23	23	23
P2_12	11	18	21	21	20	20	20	20	20
P2_13	12	16	23	23	23	23	23	23	23
P2_14	11	19	22	23	23	23	23	23	23
P2_15	11	16	20	19	22	22	21	21	21

Tablo 5. SM model çözümlerinin tanıtıcı istatistikler (Descriptive statistics of SM model solutions)

	$\alpha = 0{,}1$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}4$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}6$	$\alpha = 0{,}7$	$\alpha = 0{,}8 - 0{,}9$
Ortalama	12,2333	17,9000	20,8000	21,2667	21,8000	21,7000	21,6000	21,5667
Ortalamanın standart hatası	0,33108	0,34691	0,31220	0,28338	0,21656	0,23069	0,23781	0,23821
Medyan	12,0000	18,0000	21,0000	21,0000	22,0000	22,0000	22,0000	22,0000
Standart Sapma	1,81342	1,90009	1,71001	1,55216	1,18613	1,26355	1,30252	1,30472
Minimum	9,00	15,00	17,00	18,00	19,00	19,00	19,00	19,00
Maksimum	17,00	23,00	23,00	23,00	23,00	23,00	23,00	23,00

Tablo 6. Mann-Whitney U testi sonuçları (Mann-Whitney U test results)

α		Mann-Whitney U	p	α		Mann-Whitney U	p
0,1	0,2	20,50	0,000*	0,3	0,4	376,00	0,263
	0,3	2,00	0,000*		0,5	293,00	0,170
	0,4	0,00	0,000*		0,6	312,50	0,037*
	0,5	0,00	0,000*		0,7	330,50	0,071
	0,6	0,00	0,000*		0,8-0,9	336,00	0,084
	0,7	0,00	0,000*	0,4	0,5	364,00	0,189
	0,8-0,9	0,00	0,000*		0,6	383,00	0,307
0,2	0,3	121,00	0,000*		0,7	403,00	0,474
	0,4	85,500	0,000*		0,8-0,9	410,00	0,542
	0,5	49,00	0,000*	0,5	0,6	434,00	0,806
	0,6	54,00	0,000*		0,7	414,00	0,581
	0,7	58,00	0,000*		0,8-0,9	406,00	0,500
	0,8-0,9	59,00	0,000*	0,6	0,7	431,500	0,777
					0,8-0,9	424,500	0,697
				0,7	0,8-0,9	443,500	0,921

Tablo 7. Ortalama getiri oranlarının ortalamaları ve standart sapmaları (Means and standard deviations of average rates of return)

P. No	Ortalama	Standart Sapma	P. No	Ortalama	Standart Sapma
P1_1	-0,000105	0,001410	P2_1	0,000554	0,006535
P1_2	-0,000149	0,001251	P2_2	0,000770	0,005599
P1_3	-0,000027	0,000987	P2_3	0,000030	0,004563
P1_4	0,000052	0,001343	P2_4	-0,002907	0,005399
P1_5	-0,000109	0,001503	P2_5	-0,002320	0,007116
P1_6	-0,000261	0,001209	P2_6	-0,001123	0,006263
P1_7	0,000206	0,001287	P2_7	-0,003082	0,006263
P1_8	0,000112	0,001035	P2_8	-0,002746	0,006146
P1_9	0,000220	0,001358	P2_9	-0,003552	0,006148
P1_10	0,000231	0,001149	P2_10	-0,003322	0,008322
P1_11	-0,000372	0,001456	P2_11	-0,001557	0,005326
P1_12	0,000207	0,001180	P2_12	-0,003032	0,007159
P1_13	0,000100	0,001180	P2_13	0,000013	0,007362
P1_14	-0,000378	0,001163	P2_14	-0,002109	0,005432
P1_15	-0,000279	0,001239	P2_15	-0,003472	0,005674

Tablo 6'da verilen Mann Whitney U testi sonuçlarına göre, hisse senedi sayılarının ortalaması 0,05 anlamlılık düzeyinde $\alpha = 0{,}1$ için tüm diğer α'ya ait sonuçlardan istatistiksel olarak farklı, $\alpha = 0{,}2$'ye ait sonuçlar tüm diğer α'ya ait sonuçlardan istatistiksel olarak farklı, $\alpha = 0{,}3$'e ait sonuçlar 0,1; 0,2; 0,6 sonuçları ile farklı bulunmuştur.

Çalışma kapsamında tüm problemlere ait model sonuçları ve parametreleri incelenmiştir ve ortalama getiri oranlarının ortalamaları her bir problem için hesaplanmıştır. KM sonuçlarında negatif getirinin elde edildiği modellerde bu istatistiğin negatif değer aldığı gözlenmiştir. Ortalama ve standart sapmalar Tablo 7 ile verilmiştir.

5. Sonuçlar (Conclusion)

Bu makalede portföy optimizasyon probleminde ortalama mutlak sapmayı risk ölçütü olarak kullanan Konno-Yamazaki modelinin geliştirilmesi ve gerçek hayat problemine uyarlanması üzerine çalışılmıştır. Belirsizlik içeren getiri kavramının bulanık ve normal dağılıma sahip rassal değişken olması durumları incelenmiştir. Bulanık programlama ve şans kısıtlı programlama teknikleri kullanılarak Konno-Yamazaki modeli geliştirilerek sonuçlar yorumlanmıştır. Sonuçların genelleştirilmesi için parametreleri rasgele üretilen test problemleri oluşturulmuş toplam 600 problem çözülerek sonuçlar incelenmiştir.

Gerçek hayat problemlerinde yatırımcıların genel sorunu olan hangi hisse senedine ne oranda yatırım yapılacağı sorununa alternatif çözümler üreterek karar vericinin kararına sunulmuştur. Bu kararı verecek olan yatırımcıya katlanması gereken risk ve sonunda elde edeceği beklenen getiri miktarları sunularak seçim yapmasını kolaylaştıran değerler sunulmuştur. Literatürde ortalama mutlak sapmayı risk ölçütü olarak kullanan ve şans kısıtlı programlama tekniği ile portföy optimizasyonu yapan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Ayrıca Konno-Yamazaki modelini bulanık ve stokastik ele alarak çalışan ve karşılaştırma analizleri yapan bir çalışma da gözlenmemiştir. Çalışma bu açılardan yenilikler içermektedir.

Portföy yönetiminin en önemli fonksiyonlarından biri, risk ve getiri arasında ilişki kurmaktır. Herhangi bir hisse senedine yatırım yaparken göz önünde tutulacak en önemli unsur, risk ve getiri arasındaki ilişkidir. Çünkü yatırımcının seçimi, büyük ölçüde bu iki unsurun karşılaştırılmasını ve bunlar arasında uygun bir değişimin saptanmasını gerektirir. Bu çalışmada yapılan analizler sonucunda risk ve beklenen getiri değerleri arasında pozitif korelasyon olduğu gözlenmiştir. Bu da getirisini yükseltmek isteyen yatırımcının daha yüksek bir riski göze almasını beraberinde getirir. Bu da beklenen bir sonuçtur.

Deterministik modellerde girdi parametreleri tam olarak bilinir ve sabittir. Modelin çıktısı tam olarak belirlenebilir. Herhangi bir rassal değişken veya belirsizlik içermez. Günümüz koşullarında portföy optimizasyonu modellerindeki parametrelerin tam olarak belirlenemeyeceği ve öngörülmesi zor ve karmaşık olduğu söylenebilir. Deterministik modeller basit, doğrudan ve belirgin sonuçlar sağlamalarına rağmen gerçeği net olarak yansıtamazlar. Stokastik modeller ise içinde barındırdıkları dağılım ile daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesine olanak sağlarlar. Finansal piyasaların modellenmesi için çok elverişlidir.

Stokastik portföy optimizasyonu, portföy yöneticilerinin yatırım kararlarını alırken belirsizlikleri ve riskleri dikkate almasına olanak tanıyan bir yöntemdir. Çalışma kapsamında önerilen yöntem, yatırım portföyünün riskini belirleyerek riski yönetmeye yardımcı olarak yatırımcıların belirli bir risk seviyesine göre portföylerini optimize etmelerine olanak tanıyarak daha gerçekçi risk yönetimini sağlar. Gerçek hayat problemlerinde finansal piyasalarda belirsizlik kaçınılmazdır. Önerilen yöntem, karşılaşılan belirsizliklerle başa çıkarak bu belirsizlikleri modeller ve analiz ederek yatırımcılara daha güvenilir kararlar almalarında yardımcı olacaktır. Finansal piyasalardaki belirsizlik ve rastgele olayları daha iyi yansıtır. Bu da, gerçek dünya koşullarına daha yakın bir şekilde portföylerin optimize edilmesine olanak tanır ve daha esnek ve dinamik bir portföy yönetimi sağlar. Farklı varlık sınıflarının (hisse senetleri, tahviller, emtialar vb.) portföye dahil edilmesini ve böylece çeşitlendirme avantajlarından yararlanılmasını sağlar ve bu da portföyün riskini azaltabilir. Dinamik süreçlerin modellenmesine olanak sağlayarak zaman içinde değişen pazar koşullarını ve varlık fiyatlarını dikkate alan önerilen modeller, portföyün zaman içindeki performansını daha iyi tahmin etmeye ve optimize etmeye olanak tanımaktadır. Bu şekilde, yatırımcılar kendi tercihlerine ve risk toleranslarına en uygun portföyü oluşturabilirler. Önerilen modeller sayesinde yatırımcılar daha güvenilir kararlar alma imkanına sahip olacaktır.

Finansal piyasalarda gelecekteki fiyat hareketlerinin belirsizliği, ekonomik göstergelerin belirsizliği gibi durumlar bulanık mantık ile daha iyi modellenebilir. Bu, yatırımcıların riskleri daha iyi yönetmelerine yardımcı olabilir. Finansal piyasalar genellikle karmaşık ve dinamik bir yapıya sahiptir. Bulanık modelleme, bu karmaşıklıkla başa çıkabilir ve birden fazla değişken arasındaki etkileşimleri daha doğru bir şekilde değerlendirebilir. Bu da yatırımcıların daha detaylı analizler yapabilmesine olanak tanır.

Yatırımcılar, karmaşık karar verme süreçlerinde bulanık mantığı kullanarak kararlarını destekleyebilirler. Örneğin, yatırım portföyü çeşitlendirmesi, risk yönetimi stratejileri gibi konularda bulanık mantık ile geliştirilmiş modeller kullanılabilir.

Bu çalışmada önerilen modeller sayesinde yatırımcılar, getiri potansiyelini artırarak portföy performansını iyileştirebilirler. Çalışma kapsamında geliştirilen stokastik ve bulanık yöntemler yatırımcıları objektif verilere dayalı kararlar alınmasına teşvik eder. Bu şekilde duygusal tepkilerden arınmış, bilinçli yatırım kararları alınabilir.

Geliştirilen bulanık ve stokastik Konno- Yamazaki modellerinin elde edilen çözüm sonuçlarına göre, fon yöneticileri risk ve getiri dengesini sağlayarak, yatırımcıların risk toleranslarına uygun portföyleri oluşturabilir ve yönetebilirler. Bu modeller sayesinde farklı varlık sınıfları arasında optimal bir şekilde çeşitlenmiş portföyler oluşturulabilir. Bunun sayesinde portföyün genel riski azalıp getiri potansiyellerinde artış gözlenebilir. Veri odaklı olan bu yaklaşımlar sayesinde, fon yöneticilerine karar alma süreçlerinde bilimsel temeller sunma olanağı sağlanır. Bu sayede karar alma sürecinde bilimsel bir yaklaşım ortaya konmuş olur. Bu karar alma süreçlerine esneklik veya özelleştirme kazandırabilir. Bu modeller, portföy bileşenlerinin performansını sürekli olarak izleyerek gerektiğinde değişiklikler yapılmasına olanak tanır. Bu da dinamik piyasa koşullarına hızlı adapte olmayı sağlar.

Çalışma kapsamında önerilen modeller bireysel hisse senetlerinin yanı sıra, büyük fonları yöneten profesyonel portföy yöneticilerinin yatırım fonlarının ve emeklilik fonlarının performansını ölçmek için de kullanacakları bir araç olacaktır. Yatırımcıların profesyonel yöneticilerden beklentisi, portföyü çeşitlendirerek riski dağıtabilmesidir. Önerilen modeller de bu isteri karşılar niteliktedir. Sonraki çalışmalarda modelin birden çok amaç fonksiyonuna sahip olması durumları, belirsiz parametrelerin sezgisel, kararsız, polihedron, vb. gelişmiş bulanık versiyonları ele alınabilir. Getiri değerlerinin farklı dağılımlara sahip olması durumundaki stokastik modeller de incelenebilir. Ayrıca büyük ölçekli problemler için önerilen modellerin sonuçları değerlendirilebilir.

Kaynaklar (References)

1- Markowitz H.M., Portfolio selection, The Journal of Finance, 7 (1), 77-91, 1952.
2- Kardiyen F., Doğrusal programlama ile portföy optimizasyonu ve İMKB verilerine uygulanması üzerine bir çalışma, Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 21 (2), 15-28, 2007.
3- Üstünel İ.E., Durağan portföy analizi ve İMKB verilerine uygulanması, Emir Ofset Matbaası, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, Ankara, 2000.
4- Kaya C., Kocadağlı O., Etkin sınır ve beta katsayı kısıtlı portföy seçim modeli üzerine bir uygulama, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 11 (22), 19-35, 2012.
5- Sharpe F.W., Capital asset prices: A Theory of market equilibrium under conditions of risk, The Journal of Finance, 19, 425-442, 1964.
6- Lintner J., Security prices risk and maximal gains from diversification, The Journal of Finance, 20 (4), 587-615, 1965.
7- Mossin J., Equilibrium in a capital asset market, Econometrica: Journal of The Econometric Society, 34 (4), 768-783, 1966.
8- Konno H., Waki H., Yuuki, A., Portfolio optimization under lower partial risk measures, Asia-Pacific Financial Markets, 9, 127-140, 2002.
9- Konno H., Yamazaki H., Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market, Manage. Sci., 37 (5), 519-531, 1991.
10- Konno H., Shirakawa H., Yamazaki H., A Mean-Absolute Deviation-Skewness Portfolio Optimization Model, Ann. Oper. Res., 45, 205-220, 1993.
11- Konno H., Wijayanayake A., Mean-Absolute Devıatzon Portfolıo Optımızatıon Model Under Transactıon Costs, Journal of the Operations Research Society of Japan, 42 (4), 422-435, 1999.
12- Kardiyen F., Portföy Optimizasyonunda Ortalama Mutlak Sapma Modeli ve Markowıtz Modelinin Kullanımı Ve İmkb Verilerine Uygulanması, Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 13 (2), 335-350, 2008.
13- Zhang P., Yu L., The Optimization on the Multiperiod Mean-VaR Portfolio Selection in Friction Market, Advances in Intelligent and Soft Computing, Springer, Berlin, Heidelberg, 2, 329-335, 2011.
14- Moon Y., Yao T., A Robust Mean Absolute Deviation Model For Portfolio Optimization, Comput. Oper. Res., 38 (9), 1251-1258, 2011.
15- Kasenbacher G., Lee J., Euchukanonchai K., Mean-Variance vs. Mean-Absolute Deviation: A Performance Comparison of Portfolio Optimization Models, University of British Columbia, Thesis, 2017.
16- Chaiyakan S., Solving Interval-Valued Returns Mean Absolute Deviation Portfolio Selection Model Under Basis Stability, Chulalongkorn University, Thesis, 2019.
17- Büberkökü Ö., Borsa Yatırım Fonlarına Dayalı Statik ve Dinamik Portföy Optimizasyon Analizleri, Hacettepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 39 (4), 561-579, 2021.
18- Sehgal R., Jagadesh P., Data-Driven Robust Portfolio Optimization With Semi Mean Absolute Deviation Via Support Vector Clustering, 224, 120000, 2023.
19- Bello J.F., Taiwo E.S., Adinya I., Modified Models For Constrained Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization, International Journal of Mathematical Sciences and Optimization: Theory and Applications, 10 (1), 2024.
20- Kocadağlı O., Cinemre N., Bulanık matematiksel programlama yaklaşımıyla portföy oluşturulması, YA/EM XXVI. Ulusal Kongresi, Kocaeli-Türkiye, 2006.
21- Fang Y., Lai K.K., Wang S.Y., Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory, Eur. J. Oper. Res., 175 (2), 879–893, 2006.
22- Bozdağ N., Türe H., Bulanık doğrusal programlama ve İMKB üzerine bir uygulama, Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 10 (1), 1-18, 2008.
23- Ryoo H., A compact mean-variance-skewness model forlarge-scale portfolio optimization and its application to the NYSE, J. Oper. Res. Soc., 58(4), 505-515, 2007.
24- Huang X., Portfolio selection with fuzzy returns, J. Intell. Fuzzy Syst., 18 (4), 383–390, 2007.
25- Huang X., Mean-semivariance models for fuzzy portfolio selection, J. Comput. Appl. Math., 217 (1), 1-8, 2008.
26- Chen G., Liao X., Wang S., Acutting plane algorithm for MV portfolio selection model, Appl. Math. Comput., 215 (4), 1456-1462, 2009.
27- Li X., Qin Z., Yang L., A chance-constrained portfolio selection model with risk constraints, Appl. Math. Comput. 217 (2), 949-951, 2010.
28- Barak S., Abessi M., Modarres M., Fuzzy turnover rate chance constraints portfolio model, Eur. J. Oper. Res., 228 (1), 141-147, 2013.
29- Gupta P., Inuiguchi M., Mehlawat M.K., Mittal G., Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints, Inf. Sci., 229, 1-17, 2013.
30- Branda M., Mean-value at risk portfolio efficiency: approaches based on data envelopment analysis models with negative data and their empirical behaviour, 4OR, 14(1), 77-99, 2016.
31- Chen W., Li S.S., Zhang J., Mehlawat M., A comprehensive model for fuzzy multi-objective portfolio selection based on DEA cross-efficiency model, Soft Comput., 24, 2515-2526, 2020.
32- Jo G., Kim H., Kim H., Ri G., Fuzzy portfolio selection using stochastic correlation, Comput. Econ., 1-17, 2023.
33- Subulan K., A multi-objective mathematical programming model for a novel capability-based university course timetabling problem, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 40 (1), 365-380, 2024.
34- Atalay K.D., Apaydın A., Şans kısıtlı stokastik programlama problemlerinin deterministik eşitlikleri, Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B - Teorik Bilimler, 1 (1), 1-18, 2011.
35- Shahid M., Shamim M., Ashraf Z., Ansari M.S., A novel evolutionary optimization algorithm based solution approach for portfolio selection problem, IAES International Journal of Artificial Intelligence, 11 (3), 843-850, 2022.
36- Jalota H., Mandal P.K., Thakur M., Mittal G., A novel approach to incorporate investor's preference in fuzzy multi-objective portfolio selection problem using credibility measure, Expert Syst. Appl., 212 (118583), 2023.
37- El Kharrim M., Multi-period fuzzy portfolio optimization model subject to real constraints, EURO J. Decis. Process., 100041, 2023.
38- Zadeh L.A., Fuzzy sets, Information and control, 8 (3), 338-353, 1965.

39- Hansen B.K., Fuzzy Logic and linear programming find optimal solutions for meteorological problems, Term Paper for Fuzzy Coursa at Technical University of Nova Scotia, 1996.
40- Deng X., Li W., Liu Y., Hesitant fuzzy portfolio selection model with score and novel hesitant semi-variance, Comput. Ind. Eng., 164 (107879), 2022.
41- Li B., Sun Y., Teo K.L., An analytic solution for multi-period uncertain portfolio selection problem, Fuzzy Optim. Dec. Making, 21 (2), 319-333, 2022.
42- Lai Y.J., Hwang C.L., Lai Y.J., Hwang C.L. Fuzzy mathematical programming, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.
43- Rasoulzadeh M., Edalatpanah S.A., Fallah M., Najafi S.E., A multi-objective approach based on Markowitz and DEA cross-efficiency models for the intuitionistic fuzzy portfolio selection problem, Decision Making: Applications in Management and Engineering, 5 (2), 241-259, 2022.
44- Atalay D.K., Çok amaçlı stokastik programlama problemine etkileşimli bulanık programlama yaklaşımı, Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı, Ankara, 2006.
45- Taha H.A., Operations Research an Introduction, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, 1997.
46- Kolbin, V.V., Stochastic Programming, D. Reidel Publishing Company, Boston, 1977.
47- Sengupta, J.K. Stochastic Programming: Methods and Applications, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.
48- Ağpak K., Gökçen H., A chance-constrained approach to stochastic line balancing problem, Eur. J. Oper. Res., 180 (3), 1098-1115, 2007.
49- Foroughı A., Gökçen H, Cost oriented stochastic assembly line balancing problem, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 29 (3), 469-476, 2014.
50- Borodin V., Dolgui A., Hnaien F., Labadie N., Component replenishment planning for a single-level assembly system under random lead times: A chance constrained programming approach, Int. J. Prod. Econ., 181, 79-86, 2016.
51- Men J., Jiang P., Xu H., A chance constrained programming approach for HazMat capacitated vehicle routing problem in Type-2 fuzzy environment, J. Cleaner Prod., 237, 117754, 2019.
52- Wang X., Brownlee A.E., Weiszer M., Woodward J.R., Mahfouf M., Chen J., A chance-constrained programming model for airport ground movement optimisation with taxi time uncertainties, Transp. Res. Part C Emerging Technol., 132, 103382, 2021.
53- Birgören B., Sakallı Ü., Brass alloy blending problem from quality and cost perspectives: A multi-objective optimization approach, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 36 (1), 433-446, 2020.