



Çift Sıralı Küme Örneklemesi Tasarımı Altında Power Rayleigh Dağılımı Parametrelerinin Farklı Yöntemler ile Tahmini

Hasan Hüseyin GÜL¹ ve Nurdan YENİAY KOÇER²

How to cite: Gül, H. H., & Yeniay Koçer, N. (2025). Çift sıralı küme örneklemesi ile Power Rayleigh dağılımı parametrelerinin tahmini. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 10(1), 110-133. <https://doi.org/10.33484/sinopfbid.1597275>

Araştırma Makalesi

Sorumlu Yazar

Hasan Hüseyin GÜL
 hasangul1986@hotmail.com

Yazarlara ait ORCID

H.H.G: 0000-0001-9905-8605
 N.Y.K: 0000-0001-8263-1524

Received: 09.12.2024

Accepted: 09.05.2025

Öz

Bu çalışmada, Basit Tesadüfi Örneklemesi, Sıralı Küme Örneklemesi ve Çift Sıralı Küme Örneklemesi tasarımları altında parametre tahmini için Power Rayleigh dağılımının kullanımı incelenmiştir. Power Rayleigh dağılımına ilişkin parametrelerin tahmini için maksimum olabilirlik ve moment yöntemine dayalı tahmin edicileri tartışılmış ve bunların özellikleri basit rastgele örneklemesi, sıralı küme örneklemesi ve çift sıralı küme örneklemesi tasarımları için analiz edilmiştir. Maksimum olabilirlik ve moment tahmin edicilerinin performanslarını yanlışlıklar ve hata kare ortalamaları açısından değerlendirmek için kapsamlı bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Sonuçlar, çift sıralı küme örneklemesi altındaki moment tahmin edicisinin basit tesadüfi örneklemesi ve sıralı küme örneklemesi tasarımlarından önemli ölçüde daha verimli olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Çift sıralı küme örneklemesi, sıralı küme örneklemesi, parametre tahmini, Power Rayleigh dağılımı

Estimation of the Parameters of the Power Rayleigh Distribution Using Different Methods Under a Double Ranked Set Sampling Design

¹Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Giresun, Türkiye

²Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye

Bu çalışma Creative Commons Attribution 4.0 International License ile lisanslanmıştır

Abstract

In this study, the use of the Power Rayleigh distribution for parameter estimation under simple random sampling, ranked set sampling and double ranked set sampling designs is investigated. Maximum likelihood and method of moment estimators for parameter estimation of the power Rayleigh distribution are discussed and their properties are analysed for the simple random sampling, ranked set sampling and double ranked set sampling designs. A comprehensive Monte Carlo simulation study was carried out to evaluate the performance of the maximum likelihood and moment estimators in terms of biases and mean square errors. The results show that the moment estimator under the double ranked set sampling design is significantly more efficient than the simple random sampling and ranked set sampling designs.

Keywords: Double ranked set sampling, ranked set sampling, parameter estimation, Power Rayleigh distribution

Giriş

Sıralı Küme Örneklemesi (SKÖ) yöntemi, ilgili değişkeni sıralamanın emek, zaman ve maliyet açısından zor olduğu durumlarda sıklıkla kullanılan bir örneklem yöntemi. SKÖ yöntemi ilk olarak meralardaki ortalama ürün miktarını tahmin etmek için Basit Rastgele Örneklem (BRÖ) yöntemine alternatif olarak önerilmiştir [1]. SKÖ yönteminin alt yapısını oluşturacak matematiksel teori verilmiştir [2]. Ayrıca sıralama hatası olduğu durumda yansızlık ve etkinlik özelliğinin korunduğu da gösterilmiştir [3]. SKÖ’de örnek seçim işlemi aşağıda verilmiştir.

SKÖ’de örnek seçim

1. İlgili yığından m çaplı m küme BRÖ yöntemine dayalı olarak seçilir.
2. Her bir kümedeki birimler, herhangi bir ölçüm yapılmadan görsel yolla küçükten büyüğe sıralanır. Bu sıralama işlemi öznel yolla olduğu gibi ilgili değişkenle ilişkili bir yardımcı değişken bilgisine dayanılarak da yapılabilir.
3. Sıralanan bu birimlerden birinci kümeden birinci sıradaki birim, ikinci kümeden ikinci sıradaki birim ve son olarak m . kümeden m . sıradaki birim alınır. Bu işlem r (r =döngü sayısı) kez tekrar edilerek $n = mr$ çaplı sıralı küme örneği elde edilir.

SKÖ’de sıralama görsel yolla yapıldığı için sıralama hatalarını minimuma indirmek amacıyla farklı SKÖ tasarımları geliştirilmiştir. Samawi ve ark. [4] tarafından önerilen uç sıralı küme örneklemesi (USKÖ) tasarımı, Muttlak [5] tarafından önerilen medyan sıralı küme örneklemesi (MSKÖ) tasarımı, Al-Saleh ve Al-Hadrami [6] tarafından önerilen hareketli uç sıralı küme örneklemesi tasarımı, Al-Naseer [7] tarafından önerilen L sıralı küme örneklemesi (LSKÖ) tasarımı, Bani-Mustafa, ve ark.[8] tarafından önerilen katlanmış sıralı küme örneklemesi tasarımı bu modifikasyonlara örnek olarak gösterilebilir.

Al-Saleh ve Al-Kadiri [9] çift sıralı küme örneklemesi (ÇSKÖ) tasarımını önermişler ve ÇSKÖ tahmin edicisinin SKÖ tahmin edicisinden daha etkin olduğunu göstermişlerdir. Literatürde, tahmin edicilerin etkinliğini artırmak için ÇSKÖ’nin bazı modifikasyonlarına örnekler şöyle verilebilir: Haq ve ark. [10] tarafından önerilen eşleştirilmiş çift sıralı küme örneklemesi tasarımı, Hashemi Majd ve Saba [11] tarafından önerilen sağlam uç çift sıralı küme örneklemesi tasarımı, Khan ve ark. [12] tarafından önerilen sistematik sıralı küme örneklemesi tasarımı, Samuh ve ark. [13] tarafından önerilen karma çift sıralı küme örneklemesi tasarımı, Hanandeh ve ark. [14] tarafından önerilen çift aşamalı sıralı küme örneklemesi tasarımı önerilen tasarımlardandır. ÇSKÖ’de örnek seçim işlemi aşağıda verilmiştir.

ÇSKÖ’de örnek seçim

1. İlgili yığından m^3 birim BRÖ yöntemine dayalı olarak seçilir. Seçilen bu birimler her biri m^2 çaplı m kümeye paylaştırılır.
2. Her biri m çaplı m sıralı küme örneğini elde etmek için yukarıda verilen SKÖ seçim yöntemi m kümeye uygulanır.
3. SKÖ yöntemini her biri m boyutunda olan bu m sıralı kümelere tekrar uygulayarak m boyutunda çift sıralı bir küme örneği elde edilir.

4. $n=mr$ çaplı ÇSKÖ elde etmek için bu adımlar r kez tekrar edilir.

SKÖ ve ÇSKÖ ile örnek seçim işlemini daha anlaşılır bir şekilde ifade etmek amacıyla $m=3$ için aşağıdaki görsel örnek verilmiştir.

Öncelikle $m=3$ çaplı SKÖ örneği için yığından 9 çaplı örnek BRÖ'ye dayalı olarak seçilir ve her biri 3 çaplı 3 kümeye paylaştırılır. (X_{11}, X_{12}, X_{13}) birinci küme; (X_{21}, X_{22}, X_{23}) ikinci küme ve (X_{31}, X_{32}, X_{33}) üçüncü kümeye ait birimleri göstermektedir. Her bir kümedeki birimler küçükten büyüğe doğru sıralanır. $m=3$ çaplı sıralı küme örneği için $X_{i(1:3)}$; $i=1, 2, \dots, m$ birimler alınır. SKÖ altında $m=3$ için seçim işlemi Şekil 1' de verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} X_{1(1:3)} & X_{2(1:3)} & X_{3(1:3)} \\ X_{1(2:3)} & X_{2(2:3)} & X_{3(2:3)} \\ X_{1(3:3)} & X_{2(3:3)} & X_{3(3:3)} \end{bmatrix}$$

Şekil 1. SKÖ altında $m=3$ için seçim işlemi.

X ; olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan bir rastgele değişken olsun. μ_x ve σ_x^2 sırasıyla bu rastgele değişkene ait ortalama ve varyansı gösterebilir. $X_1, X_2, \dots, X_m$, $f(x)$ 'ten alınan m çaplı rastgele örnektir. $X_{11j}, X_{12j}, \dots, X_{1mj}$; $X_{21j}, X_{22j}, \dots, X_{2mj}$; $\dots$; $X_{m1j}, X_{m2j}, \dots, X_{mmj}$ j . döngüdeki ($j=1, 2, \dots, r$) her biri m çaplı m tane bağımsız örneği gösterir. Burada, $X_{i(i:m)j}$ j . döngüdeki m çaplı örnekteki i . sıra istatistiğidir ($i = 1, 2, \dots, m$). Yığın ortalaması için SKÖ'ye ilişkin tahmin edici Eşitlik (1)'de verildiği gibidir.

$$\bar{X}_{SKÖ} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i(i:m)j} \quad (1)$$

$\bar{X}_{SKÖ}$ tahmin edicisinin varyansı Eşitlik (2)'de verilmiştir:

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}_{SKÖ}) &= \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{i:m}^2}{m} \\ &= \frac{1}{mr} [\sigma^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu)^2]. \end{aligned} \quad (2)$$

Burada μ ; yığın ortalamasını, $\mu_{(i:m)}$; i . kümenin i . sıra istatistiğinin ortalamasını, $\sigma_{i:m}^2$ ise i . sıra istatistiğinin varyansını ifade eder.

$m=3$ çaplı çift sıralı küme örneği elde etmek için yığından 27 birim BRÖ'ye dayalı olarak seçilir. Seçilen bu birimler her biri 9 çaplı 3 kümeye paylaştırılır. Birinci, ikinci ve üçüncü kümedeki birimler sırasıyla $(X_{11}^{(1)}, X_{12}^{(1)}, X_{13}^{(1)})$, $(X_{11}^{(2)}, X_{12}^{(2)}, X_{13}^{(2)})$ ve $(X_{11}^{(3)}, X_{12}^{(3)}, X_{13}^{(3)})$. Her bir kümedeki elemanlar sıralanır. Şekil 2 de sıralanmış birimler görülmektedir.

$$\begin{bmatrix} X_{1(1:3)}^{(1)} & X_{2(1:3)}^{(1)} & X_{3(1:3)}^{(1)} \\ X_{1(2:3)}^{(1)} & X_{2(2:3)}^{(1)} & X_{3(2:3)}^{(1)} \\ X_{1(3:3)}^{(1)} & X_{2(3:3)}^{(1)} & X_{3(3:3)}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_{1(1:3)}^{(2)} & X_{2(1:3)}^{(2)} & X_{3(1:3)}^{(2)} \\ X_{1(2:3)}^{(2)} & X_{2(2:3)}^{(2)} & X_{3(2:3)}^{(2)} \\ X_{1(3:3)}^{(2)} & X_{2(3:3)}^{(2)} & X_{3(3:3)}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_{1(1:3)}^{(3)} & X_{2(1:3)}^{(3)} & X_{3(1:3)}^{(3)} \\ X_{1(2:3)}^{(3)} & X_{2(2:3)}^{(3)} & X_{3(2:3)}^{(3)} \\ X_{1(3:3)}^{(3)} & X_{2(3:3)}^{(3)} & X_{3(3:3)}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Şekil 2. ÇSKÖ'de örnek seçimi öncesi oluşturulan kümeler.

Bu birimlere SKÖ örnek seçim işlemi uygulandıktan sonra elde edilen birimler Şekil 3'te verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} X_{1(1:3)}^{(1)} & X_{1(1:3)}^{(2)} & X_{1(1:3)}^{(3)} \\ X_{2(2:3)}^{(1)} & X_{2(2:3)}^{(2)} & X_{2(2:3)}^{(3)} \\ X_{3(3:3)}^{(1)} & X_{3(3:3)}^{(2)} & X_{3(3:3)}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Şekil 3. ÇSKÖ altında $m=3$ için seçim işlemi.

$X_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, r$ için m çaplı çift sıralı küme örneğini ifade eder. Çift sıralı küme örneğine ilişkin beklenen değer ve varyans Eşitlik (3) ve (4)'te verilmiştir:

$$E(\bar{X}_{\text{ÇSKÖ}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r E(X_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)}) = \mu_x. \quad (3)$$

$$Var(\bar{X}_{\text{ÇSKÖ}}) = Var(\bar{X}_{\text{ÇSKÖ}}) + \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^m \sigma_{x(i,l:m)}^{(i,l:m)}. \quad (4)$$

Burada $\sigma_{x(i,l:m)}^{(i,l:m)} \geq 0$, ($i \neq l = 1, 2, \dots, m$) için $X_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)}$ ile $X_{l(l:m)j}^{(l)(l:m)}$ arasındaki kovaryansı ifade eder, Al- Saleh & Al- Kadiri [9].

ÇSKÖ, özellikle yığının yapısal heterojenlik gösterdiği durumlarda, etkinliğini artırmak amacıyla geliştirilmiş bir örnekleme tasarımıdır. Bu yöntemde, hem birinci hem ikinci aşamada sıralama yapılarak, her aşamada örnekleme birimleri arasındaki varyasyon daha iyi kontrol altına alınmaktadır. Bu özelliği sayesinde ÇSKÖ, varyansın azaltılması ve tahmin doğruluğunun artırılması açısından klasik örnekleme yöntemlerine kıyasla avantaj sağlayabilmektedir. Bu çalışmada ÇSKÖ'nün Power Rayleigh dağılımı altında parametre tahmin performansına etkisi detaylı şekilde ele alınmıştır.

Literatür Taraması

Literatürde, SKÖ ve modifikasyonları altında, ilgilenilen dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesi son yıllarda giderek daha fazla önem çalışılan bir konu olmaktadır. SKÖ ve modifikasyonlarına dayalı parametre tahminine ilişkin literatür taraması Tablo 1'de özetlenmiştir.

Tablo 1. Literatürde SKÖ tasarımlarına dayalı parametre tahmin çalışmalarının özetlenmesi.

Yazar	Tasarım	Dağılım
Helu ve ark. [15]	SKÖ	Weibull
Al-Omari & Al-Hadhrani [16]	ESKÖ	Modified Weibull
Elbatal [17]	SKÖ	Log-logistic
Omar & Ibrahim [18]	SKÖ, MSKÖ, ESKÖ	Pareto
Hassan [19]	SKÖ	Exponentiated exponential
Hussian [20]	SKÖ	Kumaraswamy
Yousef & Al-Subh [21]	SKÖ	Gumbel
Koshti & Kamalja [22]	SKÖ	Bivariate Lomax
Khamnei & Abusalah [23]	SKÖ	Generalized logistic
Dey ve ark. [24]	SKÖ, MSKÖ	Rayleigh
Esemen & Gürler [25]	SKÖ, MSKÖ, ESKÖ	Generalized Rayleigh
He ve ark. [26]	SKÖ	Log-logistic
Samuh ve ark. [27]	SKÖ, MSKÖ, ESKÖ	Weibull-Pareto
Taconeli & Giolo [28]	SKÖ	Power Lindley, weighted Lindley
Yang ve ark. [29]	SKÖ	Log-Extended, Exponential- Geometric
Koshti & Kamalja [30]	SKÖ	Chambanis-type Bivariate-Uniform
Pedrosa ve ark. [31]	SKÖ	Birnbaum-Saunders
Al-Omari ve ark. [32]	SKÖ	Generalized Quasi-Lindley
Sabry & Almetwally [33]	SKÖ, ÇSKÖ	Exponential Pareto
He ve ark. [34]	MESKÖ	Log-Logistic
Chen ve ark. [35]	MESKÖ	Pareto
Sevil & Yildiz [36]	SKÖ	Gumbel's Bivariate-Exponential
Al-Omari ve ark. [37]	SKÖ	Xgamma
Nagy ve ark. [38]	SKÖ	Inverted Kumaraswamy
Sabry ve ark. [39]	SKÖ, ÇSKÖ	Weibull
Yang ve ark. [40]	MESKÖ	Log-Extended, Exponential- Geometric

Bunlara ek olarak SKÖ tasarımı güven aralığı ve hipotez testi çalışmalarında da sıklıkla kullanılan bir tasarımdır. Örneğin Yeniay Koçer ve ark. [41], SKÖ tasarımı altında bootstrap yöntemine dayalı güven aralığı kapsama oranını ve güven aralığı genişliğini farklı dağılımlar altında incelemişlerdir.

Şekil parametresi 2'ye eşit olduğunda Weibull dağılımının özel bir durumu olan Rayleigh dağılımı, Lord Rayleigh tarafından önerilen iyi bilinen bir olasılık dağılımıdır (Rayleigh [42]). Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) ve dağılım fonksiyonu (df) aşağıdaki gibidir,

$$f(y) = \frac{y}{\theta^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta^2}\right); y > 0, \theta > 0, \quad (5)$$

$$F(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta^2}\right). \quad (6)$$

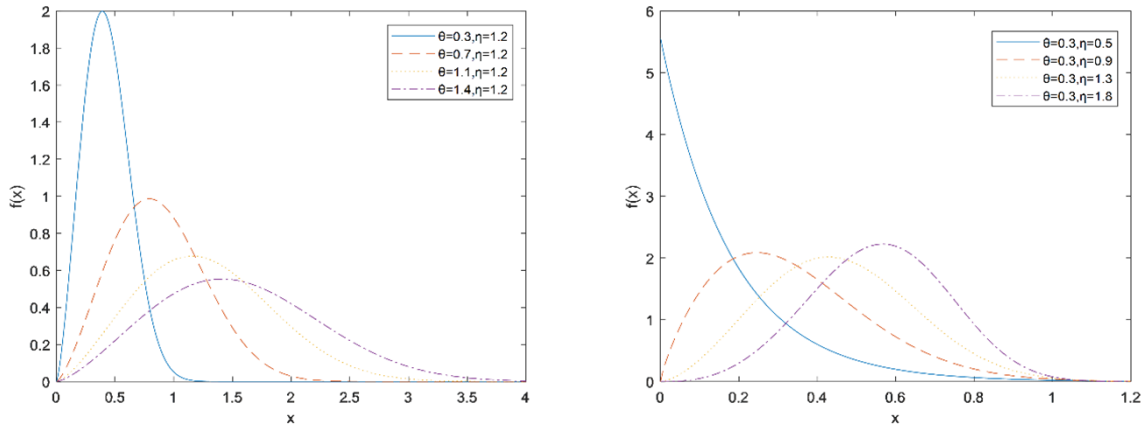
Rayleigh dağılımının esnekliğini artırmak için Bhat & Ahmad [43] $X = Y^{\frac{1}{\eta}}$ dönüşümünü kullanarak Power Rayleigh (PR) dağılımını önermişlerdir. PR dağılımının oyf ve df'nu,

$$f(x) = \frac{n}{\theta^2} x^{2\eta-1} \exp\left(-\frac{x^{2\eta}}{2\theta^2}\right), x > 0, \eta, \theta > 0, \quad (7)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^{2\eta}}{2\theta^2}\right). \quad (8)$$

şeklindedir.

PR dağılımının farklı parametre değerleri için oyf grafikleri Şekil 1 de verildiği gibidir.



Şekil 4. PR dağılımının farklı parametre değerleri için oyf grafikleri.

Motivasyon ve Amaç

Bu çalışmanın amacı, BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ bağlamında Power Rayleigh (PR) dağılımına ilişkin parametrelerin En Çok Olabilirlik (EÇO) ve Moment (MoM) tahminlerini önermektir. Literatürde ÇSKÖ'ye dayalı parametre tahmini üzerine neredeyse hiç çalışma bulunmamaktadır. EÇO ve MoM tahmin edicileri ile bu tasarıma katkı sağlanması amaçlanmıştır. Ayrıca EÇO ve MoM tahmin edicileri kullanılarak hangi örnekleme yöntemlerinin hangi tahmin edicide daha etkin olduğu değerlendirilmeye çalışılmıştır. Power Rayleigh dağılımı ile ilgili literatürde parametrik tahmin yöntemlerine ilişkin çeşitli çalışmalar bulunmakla birlikte, bu dağılımın örnekleme tasarımlarına duyarlılığına ilişkin kapsamlı karşılaştırmalı analizler oldukça sınırlıdır. Özellikle, sıralı yapıya sahip küme örnekleme tasarımları altında tahmin performanslarının sistematik olarak incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın katkıları aşağıda sıralanmıştır:

PR dağılımlarının parametreleri BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ şemalarına dayalı olarak tahmin edilmektedir.

- PR dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahminleri, EÇO ve MoM tahmin edici yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir.
- Bu tahmin ediciler BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ olmak üzere üç farklı tasarım altında elde edilmiştir.

- Örneklem tasarımlarının ve tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak için kapsamlı Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması ile birlikte ÇSKÖ tasarımının ilgili dağılıma özgü yapısal avantajları ortaya konulmuştur.
- BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ altında elde edilen tahmin edicilerin performansları yan ve hata kare ortalaması (HKO) kriterlerine göre karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır.

Bu yönleriyle çalışma, istatistiksel örnekleme kuramı ile parametrik tahmin yöntemlerini bir araya getirerek, uygulayıcılara farklı örnekleme stratejilerinin etkilerini değerlendirme imkânı sunmaktadır.

Basit Tesadüfî Örnekleme Altında En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, \dots, X_n$ PR dağılımından seçilen bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele örneklem olmak üzere, η ve θ nın olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları Eşitlik (9) ve (10)' da verildiği gibidir:

$$L(\eta, \theta; x) = \prod_{i=1}^n \frac{\eta}{\theta^2} x_i^{2\eta-1} \exp\left(-\frac{x_i^{2\eta}}{2\theta^2}\right), \quad (9)$$

$$l(\eta, \theta) = n \log(\eta) - 2n \log(\theta) + (2n-1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^{2\eta}. \quad (10)$$

Sırasıyla η ve θ parametrelerinin $\hat{\eta}_{ML,SRS}$ ve $\hat{\theta}_{ML,SRS}$ tahmin edicileri olabilirlik denklemlerinin çözümü olarak elde edilebilir.

$$\frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} + 2 \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^{2\eta} \log(x_i) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^{2\eta}. \quad (12)$$

Eşitlik (11) ve (12) için kapalı formda bir çözüm yoktur. Bu nedenle, şekil ve ölçek parametrelerinin tahminleri için sayısal teknikler kullanılmıştır.

Basit Tesadüfî Örnekleme Altında Moment Tahmini

PR dağılımının şekil parametresi η ve ölçek parametresi θ ' nın moment tahmin edicileri, örnek momentlerine karşılık gelen teorik momentlere eşitlenmesi ile bulunur. PR dağılımının k . momenti $\mu_k = \int_0^\infty x^k f(x; \eta, \theta) dx = (2\theta^2)^{\frac{k}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{k}{2\eta} + 1\right)$ şeklindedir. $\bar{X}$ and S^2 sırasıyla rastgele örneğin ortalaması ve varyansı olsun. $\frac{S}{\bar{X}}$ değişim katsayısı (dk), örnek ortalaması ($\bar{X}$) ve örnek varyansı (S^2),

$$\bar{X} = (2\theta^2)^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{2\eta} + 1\right), \quad (13)$$

$$S^2 = (2\theta^2)^{\frac{1}{\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{\eta} + 1\right) - (2\theta^2)^{\frac{1}{\eta}} \Gamma^2\left(\frac{1}{2\eta} + 1\right), \quad (14)$$

olmak üzere, Eşitlik (13) ve (14) kullanılarak $\hat{\eta}$ ve $\hat{\theta}$ tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\frac{s}{\bar{x}} = \hat{\eta} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}, \quad (15)$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{2^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)} \right)^{\hat{\eta}}. \quad (16)$$

Eşitlik (15) ve (16)'yı çözmek için sayısal yöntemler kullanılacaktır.

Sıralı Küme Örnekleme Altında En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_{(i:m)j}$ nin oyf'nu Eşitlik (3) ve (5) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir,

$$f_{i:m}(x_{(i:m)j}) = c(F(x_{(i:m)j}))^{i-1} (F(x_{(i:m)j}))^{m-i} f(x_{(i:m)j}), \quad (17)$$

$$\text{Burada } c = \frac{1}{B(i, m-i+1)},$$

$$f(x) = \frac{n}{\theta^2} x^{2\eta-1} \exp\left(-\frac{x^{2\eta}}{2\theta^2}\right), x > 0, \eta, \theta > 0, \quad (18)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^{2\eta}}{2\theta^2}\right). \quad (19)$$

Olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L &= \prod_{j=1}^r \sum_{i=1}^m f_{i:m}(x_{(i:m)j}) \\ &= \prod_{j=1}^r \sum_{i=1}^m [c(F(x_{(i:m)j}))^{i-1} (1 - F(x_{(i:m)j}))^{m-i} f(x_{(i:m)j})] \\ &= c^{mr} \prod_{j=1}^r \sum_{i=1}^m [(F(x_{(i:m)j}))^{i-1} (1 - F(x_{(i:m)j}))^{m-i} f(x_{(i:m)j})], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} l &= mr \log(c) + \prod_{j=1}^r \sum_{i=1}^m (i-1) \log(F(x_{(i:m)j})) + \sum_j \sum_i (m-i) \log(1 - F(x_{(i:m)j})) \\ &\quad + \sum_j \sum_i \log(f(x_{(i:m)j})), \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (21)'in sırasıyla η ve θ ya göre türevleri alınır ve elde edilen eşitlikler sıfıra eşitlenerek çözümler elde edilir.

Sıralı Küme Örnekleme Altında Moment Tahmini

BRÖ'dekine benzer olarak, Y_{ij} 'nin momentleri kullanılarak MoM tahmincileri elde edilir,

$$\begin{aligned} M_R &= \int_0^\infty \frac{m\eta}{\theta^2} y_{ij}^{s+2\eta-1} e^{-m\frac{y_{ij}^{2\eta}}{2\theta^2}} \partial y_{ij} \\ &= \left(\frac{2\theta^2}{m}\right)^{\frac{s}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{s}{2\eta} + 1\right). \end{aligned} \quad (22)$$

$\bar{Y}$ ve S_y^2 rastgele örneğin ortalamasını ve varyansını gösterir ve $\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m X_{(i)ij}}{mr}$ and $S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m (X_{(i)ij} - \bar{Y})^2}{mr}$ ile verilir. Yığına ait birinci ve ikinci momentleri örnek momentlerine eşitleyerek örneğin ortalaması $\bar{Y}$ aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\bar{Y} = \left(\frac{2\theta^2}{m}\right)^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{2\eta} + 1\right). \quad (23)$$

$\hat{\eta}$ ve $\hat{\theta}$ 'nin MoM tahmin edicileri,

$$\frac{S_y}{\bar{Y}} = \hat{\eta} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}, \quad (24)$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{Y}}{\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}\right)^{\hat{\eta}}. \quad (25)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (24) ve (25)'i çözmek için sayısal yöntemler kullanılacaktır.

Çift Sıralı Küme Örneklemesi Altında En Çok Olabilirlik Tahmini

Durum I: m çift iken

Çift küme çapına sahip bir ÇSKÖ örneği için, $X_{(i:m)}^j, j = 1, \dots, r$ ilişkin oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir,

$$f_{X_{1,j}}(x_{1,j}; \theta) = m f_{1:m}(x_{1,j}; \theta) [1 - F_{1:m}(x_{1,j}; \theta)]^{m-1}, \quad (26)$$

$$F_{X_{1,j}}(x_{1,j}; \theta) = P_{X_{1,j}}(X_{1,j} \leq x_{1,j}) = 1 - [1 - F_{1:m}(x_{1,j}; \theta)]^m. \quad (27)$$

$X_{1,1} X_{1,2}, \dots, X_{1,r}$ örneğine ait olabilirlik fonksiyonu Eşitlik (28)'de verildiği gibidir,

$$L_{1:m}(\theta) = \prod_{j=1}^r (m f_{1:m}(x_{1,j}; \theta) [1 - F_{1:m}(x_{1,j}; \theta)]^{m-1}). \quad (28)$$

Benzer şekilde $X_{m:m}^k$ ye ait oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir,

$$f_{X_{m,k}}(x_{m,k}; \theta) = m f_{m:m}(x_{m,k}; \theta) [F_{m:m}(x_{m,k}; \theta)]^{m-1} \quad (29)$$

$$F_{X_{m,k}}(x_{m,k}; \theta) = P_{X_{m,k}}(X_{m,k} \leq x_{m,k}) = [F_{m:m}(x_{m,k}; \theta)]^m. \quad (30)$$

$X_{m:m}^{r+1}, X_{m:m}^{r+2}, \dots, X_{m:m}^m$ ait olabilirlik fonksiyonu Eşitlik (31)'deki gibi olacaktır,

$$L_{m:m}(\theta) = \prod_{k=r+1}^m (m f_{m:m}(x_{m,k}; \theta) [F_{m:m}(x_{m,k}; \theta)]^{m-1}). \quad (31)$$

Eşitlik (30) ve (31), ÇSKÖ örneğinin çift olduğu durum için olabilirlik fonksiyonunu verir ve aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$L(\theta; X_{D(e)}) = \left[\prod_{j=1}^r f_{X_{1,j}}(x_{1,j}; \theta) \right] \times \left[\prod_{k=r+1}^m f_{X_{m,k}}(x_{m,k}; \theta) \right] \\ = \left[\prod_{j=1}^r m f_{1:m}(x_{1,j}; \theta) [1 - F_{1:m}(x_{1,j}; \theta)]^{m-1} \right] \times \left[\prod_{k=r+1}^m m f_{m:m}(x_{m,k}; \theta) [F_{m:m}(x_{m,k}; \theta)]^{m-1} \right]. \quad (32)$$

ÇSKÖ' nin çift olduğu durumda, log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik (33)' te elde edilmiştir,

$$l = 2m \log(m) + \sum_{j=1}^r \log(f_{1:m}(x_{1,j})) + \sum_{j=1}^r (m-1) \log[1 - F_{1:m}(x_{1,j})] \\ + \sum_{k=r+1}^m \log(f_{m:m}(x_{m,k})) + \sum_{k=r+1}^m (m-1) \log[F_{m:m}(x_{m,k})]. \quad (33)$$

Durum II: m tek iken

ÇSKÖ' nin tek olduğu durumda $X_{(r+1),(r+1)}$ ait oyf ve df sırasıyla Eşitlik (34) ve (35)' te verildiği gibidir,

$$f_{X_{(r+1),(r+1)}}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) = \left(f_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right) \times \left(F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right) \\ \times \left(1 - F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right)^r, \quad (34)$$

$$F_{X_{(r+1),(r+1)}}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) = \frac{(2r+1)!}{r!r!} \sum_{l=0}^r \frac{(-1)^l \binom{r}{l}}{(r+l+1)} \times \left(F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right)^{r+l+1}, \quad (35)$$

Eşitlik (28), (31) ve (35)' ten ÇSKÖ' nin tek olduğu duruma ilişkin olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L(\theta; X_{D(o)}) = \left[\prod_{j=1}^r f_{X_{1,j}}(x_{1,j}; \theta) \right] \times \left[\prod_{k=r+1}^m f_{X_{m,k}}(x_{m,k}; \theta) \right] \times \left(f_{X_{(r+1),(r+1)}}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right) \\ = \left[\prod_{j=1}^r m f_{1:m}(x_{1,j}; \theta) [1 - F_{1:m}(x_{1,j}; \theta)]^{m-1} \right] \times \left[\prod_{k=r+1}^m m f_{m:m}(x_{m,k}; \theta) [F_{m:m}(x_{m,k}; \theta)]^{m-1} \right] \\ \times \left(\frac{(2r+1)!}{r!r!} f_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right) \times \left(F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right) \\ \times \left(1 - F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}; \theta) \right)^r. \quad (36)$$

ÇSKÖ' nin tek olduğu duruma ilişkin log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik (37)' deki gibi elde edilir,

$$l = 2(m-1) \log(m) + \sum_{j=1}^r \log(f_{1:m}(x_{1,j})) + \sum_{j=1}^r (m-1) \log[1 - F_{1:m}(x_{1,j})] \\ + \sum_{k=r+1}^m \log(f_{m:m}(x_{m,k})) + \sum_{k=r+1}^m (m-1) \log[F_{m:m}(x_{m,k})] \\ + \log \left(f_{X_{(r+1):m}}(x_{(r+1),(r+1)}) \right) + \log \left(F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}) \right) \\ + r \left[\log \left(1 - F_{(r+1):m}(x_{(r+1),(r+1)}) \right) \right]. \quad (37)$$

Çift Sıralı Küme Örneklemesi Altında Moment Tahmini

BRÖ' deki benzer olarak, $Y_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)}$ nin l . momenti kullanılarak MoM tahmin edicileri elde edilir,

$$M_D = \int_0^\infty \frac{m^3 \eta}{\theta^2} \left(y_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)} \right)^{l+2\eta-1} e^{-m^3 \frac{(y_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)})^{2\eta}}{2\theta^2}} \partial y_{i(i:m)j}^{(i)(i:m)}$$

$$= \left(\frac{2\theta^2}{m^3}\right)^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{l}{2\eta} + 1\right). \quad (38)$$

Yığına ait birinci ve ikinci momentleri örnek momentlerine eşitleyerek, örneğin ortalaması $\bar{Y}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bar{Y} = \left(\frac{2\theta^2}{m^3}\right)^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{2\eta} + 1\right). \quad (39)$$

$\hat{\eta}$ ve $\hat{\theta}$ 'nın MoM tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\frac{s_y}{\bar{Y}} = \hat{\eta} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)}, \quad (40)$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{Y}}{\left(\frac{2}{m^3}\right)^{\frac{1}{2\eta}} \Gamma\left(\frac{1}{2\eta}+1\right)} \right)^{\hat{\eta}}. \quad (41)$$

Eşitlik (40) ve (41)'i çözmek için sayısal yöntemler kullanılacaktır.

Simülasyon Çalışması

PR dağılımının bilinmeyen parametrelerinin ML ve MoM tahminlerini elde etmek ve BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ tasarımlarına dayalı tahmin edicilerin performansını karşılaştırmak için sayısal yöntemler kullanılır. Monte Carlo simülasyonu farklı küme boyutları, farklı döngü sayıları ve farklı parametre değerleri için uygulanmıştır. Simülasyon prosedürleri aşağıdaki algoritma ile açıklanmıştır.

1. PR dağılımından farklı küme çapları, tekrar sayıları ve parametreler kullanılarak $n=12,24,36,48$ küme çaplarında BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ örnekleri üretilir. Parametre kombinasyonları Şekil 1 de verilen grafiklere göre seçilmiştir.
2. Seçilen her n örnek boyutu için BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ örneklerini kullanarak türetilen ML ve MoM tahminlerini hesaplanır.
3. Adım (1) ve (2), $N=10.000$ olacak şekilde N kez tekrarlanır. Ardından tüm tahminlerin yanları ve hata kareler ortalamaları (HKO) hesaplanır.

Simülasyon çalışmasına ait sonuçlar Tablo 2-9' da verilmiştir.

Tablo 2. $\theta = 0.3$ ve $\eta = 0.5, 0.9$ parametreleri için yan değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 0.3, \eta = 0.5$												
3*4					-0.0197	-0.0312	0.0514	0.0840	-0.0185	-0.0305	0.0490	0.0812
4*3	-0.0249	-0.0353	0.0663	0.0953	-0.0170	-0.0298	0.0441	0.0789	-0.0168	-0.0285	0.0449	0.0768
6*2					-0.0154	-0.0261	0.0388	0.0685	-0.0145	-0.0260	0.0375	0.0674
3*8					-0.0099	-0.0168	0.0239	0.0435	-0.0094	-0.0168	0.0236	0.0432
4*6	-0.0124	-0.0187	0.0306	0.0476	-0.0090	-0.0161	0.0209	0.0411	-0.0090	-0.0166	0.0217	0.0422
6*4					-0.0068	-0.0141	0.0166	0.0361	-0.0075	-0.0150	0.0180	0.0371
3*12					-0.0064	-0.0122	0.0158	0.0311	-0.0062	-0.0119	0.0153	0.0305
4*9	-0.0083	-0.0134	0.0209	0.0345	-0.0058	-0.0112	0.0142	0.0283	-0.0057	-0.0116	0.0140	0.0296
6*6					-0.0043	-0.0103	0.0110	0.0258	-0.0050	-0.0093	0.0121	0.0241
3*16					-0.0050	-0.0091	0.0119	0.0224	-0.0049	-0.0087	0.0115	0.0222
4*12	-0.0064	-0.0105	0.0155	0.0266	-0.0045	-0.0087	0.0106	0.0215	-0.0044	-0.0085	0.0108	0.0225
6*8					-0.0040	-0.0075	0.0094	0.0195	-0.0040	-0.0083	0.0092	0.0207
$\theta = 0.3, \eta = 0.9$												
3*4					-0.0197	-0.0214	0.0936	0.0977	-0.0200	-0.0196	0.0938	0.0912
4*3	-0.0258	-0.0256	0.1222	0.1209	0.0172	-0.0187	0.0799	0.0854	-0.0168	-0.0178	0.0814	0.0822
6*2					-0.0141	-0.0136	0.0648	0.0627	-0.0146	-0.0152	0.0672	0.0671
3*8					-0.0106	-0.0106	0.0447	0.0456	-0.0101	-0.0101	0.0444	0.0450
4*6	-0.0128	-0.0130	0.0569	0.0574	-0.0092	-0.0092	0.0399	0.0400	-0.0083	-0.0089	0.0369	0.0375
6*4					-0.0073	-0.0077	0.0307	0.0325	-0.0075	-0.0070	0.0336	0.0315
3*12					-0.0065	-0.0068	0.0271	0.0305	-0.0065	-0.0065	0.0293	0.0291
4*9	-0.0083	-0.0080	0.0359	0.0366	-0.0063	-0.0061	0.0269	0.0252	-0.0060	-0.0056	0.0260	0.0246
6*6					-0.0049	-0.0050	0.0213	0.0210	-0.0046	-0.0050	0.0205	0.0218
3*16					-0.0050	-0.0049	0.0209	0.0212	-0.0046	-0.0056	0.0210	0.0231
4*12	-0.0063	-0.0060	0.0276	0.0277	-0.0042	-0.0043	0.0185	0.0186	-0.0041	-0.0040	0.0181	0.0165
6*8					-0.0038	-0.0041	0.0160	0.0173	-0.0036	-0.0038	0.0157	0.0159

Tablo 3. $\theta = 0.3$ ve $\eta = 1.3, 1.8$ parametreleri için yan değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 0.3, \eta = 1.3$												
3*4					-0.0197	-0.0186	0.1330	0.1248	-0.0201	-0.0183	0.1330	0.1257
4*3	-0.0257	-0.0240	0.1729	0.1613	-0.0173	-0.0160	0.1205	0.1058	-0.0178	-0.0148	0.1200	0.0993
6*2					-0.0150	-0.0136	0.0989	0.0871	-0.0149	-0.0121	0.0983	0.0799
3*8					-0.0095	-0.0087	0.0614	0.0556	-0.0098	-0.0086	0.0620	0.0550
4*6	-0.0121	-0.0112	0.0792	0.0739	-0.0089	-0.0075	0.0549	0.0467	-0.0078	-0.0070	0.0517	0.0490
6*4					-0.0073	-0.0059	0.0472	0.0393	-0.0066	-0.0057	0.0422	0.0375
3*12					-0.0062	-0.0059	0.0390	0.0369	-0.0067	-0.0059	0.0401	0.0365
4*9	-0.0081	-0.0076	0.0510	0.0463	-0.0057	-0.0050	0.0353	0.0320	-0.0054	-0.0051	0.0352	0.0315
6*6					-0.0052	-0.0045	0.0322	0.0269	-0.0047	-0.0044	0.0304	0.0260
3*16					-0.0055	-0.0045	0.0349	0.0271	-0.0049	-0.0041	0.0315	0.0267
4*12	-0.0064	-0.0054	0.0411	0.0336	-0.0041	-0.0036	0.0252	0.0229	-0.0040	-0.0043	0.0250	0.0255
6*8					-0.0041	-0.0030	0.0243	0.0199	-0.0033	-0.0035	0.0200	0.0207
$\theta = 0.3, \eta = 1.8$												
3*4					-0.0205	-0.0183	0.1893	0.1771	-0.0202	-0.0178	0.1903	0.1704
4*3	-0.0264	-0.0233	0.2549	0.2299	-0.0168	-0.0152	0.1595	0.1444	-0.0165	-0.0153	0.1567	0.1437
6*2					-0.0143	-0.0116	0.1314	0.1085	-0.0141	-0.0122	0.1281	0.1120
3*8					-0.0098	-0.0088	0.0889	0.0774	-0.0102	-0.0088	0.0912	0.0751
4*6	-0.0124	-0.0120	0.0121	0.1109	-0.0088	-0.0074	0.0779	0.0654	-0.0085	-0.0083	0.0764	0.0715
6*4					-0.0067	-0.0059	0.0610	0.0531	-0.0082	-0.0062	0.0691	0.0558
3*12					-0.0069	-0.0052	0.0607	0.0487	-0.0067	-0.0064	0.0567	0.0569
4*9	-0.0084	-0.0077	0.0723	0.0683	-0.0060	-0.0051	0.0525	0.0436	-0.0058	-0.0056	0.0501	0.0472
6*6					-0.0047	-0.0045	0.0407	0.0369	-0.0045	-0.0038	0.0404	0.0339
3*16					-0.0049	-0.0043	0.0414	0.0392	-0.0045	-0.0036	0.0409	0.0341
4*12	-0.0064	-0.0057	0.0549	0.0521	-0.0042	0.0039	0.0366	0.0369	-0.0040	-0.0038	0.0381	0.0332
6*8					-0.0041	-0.0028	0.0335	0.0257	-0.0038	-0.0033	0.0315	0.0272

Tablo 4. $\theta = 0.3, 0.7$ ve $\eta = 1.2$ parametreleri için yan değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 0.3, \eta = 1.2$												
3*4					-0.0194	-0.0186	0.1219	0.1133	-0.0193	-0.0186	0.1184	0.1159
4*3	-0.0253	-0.0251	0.1619	0.1554	-0.0173	-0.0153	0.1052	0.0965	-0.0176	-0.0151	0.1092	0.0963
6*2					-0.0144	-0.0126	0.0875	0.0759	-0.0155	-0.0128	0.0923	0.0766
3*8					-0.0096	-0.0094	0.0566	0.0555	-0.0105	-0.0083	0.0629	0.0509
4*6	-0.0125	-0.0114	0.0741	0.0688	-0.0081	-0.0076	0.0508	0.0466	-0.0089	-0.0075	0.0530	0.0454
6*4					-0.0065	-0.0069	0.0398	0.0396	-0.0075	-0.0066	0.0443	0.0371
3*12					-0.0065	-0.0063	0.0396	0.0371	-0.0063	-0.0061	0.0357	0.0344
4*9	-0.0080	-0.0078	0.0481	0.0470	-0.0054	-0.0051	0.0323	0.0287	-0.0061	-0.0051	0.0349	0.0299
6*6					-0.0052	-0.0037	0.0300	0.0217	-0.0046	-0.0046	0.0268	0.0263
3*16					-0.0046	-0.0043	0.0266	0.0238	-0.0053	-0.0040	0.0302	0.0265
4*12	-0.0062	-0.0058	0.0342	0.0341	-0.0043	-0.0038	0.0255	0.0225	-0.0043	-0.0038	0.0235	0.0210
6*8					-0.0032	-0.0032	0.0183	0.0181	-0.0037	-0.0027	0.0202	0.0152
$\theta = 0.7, \eta = 1.2$												
3*4					0.0033	-0.0024	0.1231	0.1094	0.0023	-0.0018	0.1220	0.1052
4*3	0.0059	0.0051	0.1585	0.1542	-0.0026	-0.0018	0.1112	0.0955	-0.0019	-0.0012	0.1064	0.0954
6*2					-0.0019	-0.0014	0.0847	0.0793	-0.0014	-0.0009	0.0886	0.0769
3*8					-0.0019	0.0011	0.0561	0.0571	0.0006	-0.0015	0.0554	0.0483
4*6	0.0015	0.0014	0.0707	0.0707	-0.0014	-0.0006	0.0498	0.0476	-0.0004	-0.0014	0.0523	0.0470
6*4					-0.0006	-0.0009	0.0450	0.0334	-0.0003	-0.0016	0.0407	0.0327
3*12					0.0004	-0.0009	0.0380	0.0349	0.0005	-0.0003	0.0385	0.0324
4*9	0.0017	0.0016	0.0509	0.0461	-0.0003	-0.0007	0.0342	0.0293	0.0000	-0.0010	0.0333	0.0290
6*6					-0.0001	-0.0014	0.0299	0.0217	-0.0005	-0.0003	0.0282	0.0259
3*16					-0.0009	-0.0008	0.0292	0.0240	0.0000	-0.0008	0.0307	0.0237
4*12	0.0012	0.0005	0.0357	0.0333	0.0001	-0.0002	0.0248	0.0231	-0.0003	-0.0004	0.0257	0.0229
6*8					-0.0006	-0.0004	0.0208	0.0196	-0.0004	-0.0007	0.0226	0.0178

Tablo 5. $\theta = 1.1, 1.4$ ve $\eta = 1.2$ parametreleri için yan değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 1.1, \eta = 1.2$												
3*4					0.0627	0.0549	0.1254	0.1088	0.0620	0.0513	0.1244	0.1124
4*3	0.0987	0.0898	0.1668	0.1510	0.0518	0.0447	0.1072	0.1018	0.0550	0.0440	0.1119	0.1006
6*2					0.0391	0.0340	0.0873	0.0790	0.0409	0.0299	0.0871	0.0732
3*8					0.0277	0.0253	0.0560	0.0530	0.0252	0.0242	0.0554	0.0530
4*6	0.0384	0.0350	0.0733	0.0651	0.0225	0.0206	0.0511	0.0454	0.0232	0.0198	0.0509	0.0469
6*4					0.0191	0.0173	0.0440	0.0403	0.0180	0.0156	0.0416	0.0350
3*12					0.0179	0.0156	0.0360	0.0320	0.0165	0.0156	0.0357	0.0336
4*9	0.0256	0.0246	0.0471	0.0440	0.0154	0.0123	0.0357	0.0309	0.0152	0.0138	0.0329	0.0300
6*6					0.0114	0.0111	0.0272	0.0249	0.0123	0.0094	0.0283	0.0234
3*16					0.0116	-0.0109	0.0271	0.0246	0.0134	0.0123	0.0274	0.0258
4*12	0.0201	0.0179	0.0373	0.0328	0.0119	0.0097	0.0253	0.0213	0.0102	0.0087	0.0233	0.0205
6*8					0.0090	0.0080	0.0189	0.0178	0.0089	0.0076	0.0213	0.0161
$\theta = 1.4, \eta = 1.2$												
3*4					0.1282	0.1178	0.1203	0.1075	0.1323	0.1185	0.1224	0.1125
4*3	0.2034	0.1862	0.1639	0.1490	0.1098	0.1027	0.1085	0.1002	0.1154	0.0994	0.1107	0.0975
6*2					0.0928	0.0762	0.0940	0.0773	0.0842	0.0738	0.0856	0.0763
3*8					0.0521	0.0490	0.0535	0.0503	0.0563	0.0513	0.0561	0.0511
4*6	0.0878	0.0836	0.0754	0.0724	0.0479	0.0432	0.0506	0.0437	0.0475	0.0460	0.0489	0.0463
6*4					0.0422	0.0357	0.0430	0.0376	0.0397	0.0324	0.0410	0.0345
3*12					0.0402	0.0340	0.0404	0.0341	0.0323	0.0324	0.0348	0.0349
4*9	0.0544	0.0503	0.0503	0.0461	0.0326	0.0293	0.0334	0.0308	0.0308	0.0278	0.0324	0.0300
6*6					0.0274	0.0217	0.0298	0.0220	0.0266	0.0237	0.0291	0.0259
3*16					0.0253	0.0234	0.0259	0.0243	0.0290	0.0257	0.0296	0.0266
4*12	0.0369	0.0360	0.0328	0.0336	0.0237	0.0218	0.0256	0.0239	0.0242	0.0215	0.0266	0.0239
6*8					0.0212	0.0131	0.0230	0.0129	0.0199	0.0179	0.0224	0.0197

Tablo 6. $\theta = 0.3$ ve $\eta = 0.5, 0.9$ parametreleri için HKO değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 0.3, \eta = 0.5$												
3*4					0.0042	0.0049	0.0201	0.0255	0.0042	0.0048	0.0196	0.0234
4*3	0.0049	0.0056	0.0263	0.0313	0.0037	0.0046	0.0167	0.0221	0.0037	0.0045	0.0172	0.0228
6*2					0.0032	0.0039	0.0133	0.0179	0.0031	0.0039	0.0130	0.0179
3*8					0.0019	0.0023	0.0073	0.0101	0.0019	0.0023	0.0072	0.0099
4*6	0.0022	0.0026	0.0092	0.0121	0.0017	0.0022	0.0063	0.0092	0.0016	0.0023	0.0063	0.0092
6*4					0.0014	0.0019	0.0050	0.0078	0.0014	0.0020	0.0050	0.0082
3*12					0.0013	0.0016	0.0045	0.0066	0.0012	0.0015	0.0043	0.0063
4*9	0.0014	0.0017	0.0055	0.0076	0.0011	0.0014	0.0038	0.0057	0.0011	0.0015	0.0039	0.0061
6*6					0.0009	0.0013	0.0030	0.0052	0.0009	0.0013	0.0032	0.0050
3*16					0.0009	0.0012	0.0031	0.0046	0.0009	0.0011	0.0031	0.0046
4*12	0.0010	0.0012	0.0039	0.0055	0.0008	0.0011	0.0027	0.0043	0.0008	0.0011	0.0026	0.0044
6*8					0.0007	0.0010	0.0023	0.0039	0.0007	0.0010	0.0023	0.0039
$\theta = 0.3, \eta = 0.9$												
3*4					0.0042	0.0041	0.0652	0.0611	0.0040	0.0040	0.0664	0.0600
4*3	0.0051	0.0049	0.0930	0.0868	0.0037	0.0038	0.0546	0.0542	0.0037	0.0036	0.0545	0.0509
6*2					0.0031	0.0030	0.0409	0.0366	0.0031	0.0030	0.0432	0.0394
3*8					0.0019	0.0019	0.0238	0.0229	0.0019	0.0019	0.0233	0.0228
4*6	0.0022	0.0022	0.0308	0.0301	0.0017	0.0017	0.0209	0.0197	0.0017	0.0017	0.0205	0.0199
6*4					0.0014	0.0014	0.0162	0.0162	0.0014	0.0015	0.0167	0.0158
3*12					0.0012	0.0013	0.0138	0.0144	0.0012	0.0012	0.0141	0.0136
4*9	0.0014	0.0014	0.0174	0.0172	0.0011	0.0011	0.0124	0.0124	0.0011	0.0011	0.0124	0.0126
6*6					0.0009	0.0010	0.0102	0.0102	0.0009	0.0010	0.0101	0.0102
3*16					0.0009	0.0009	0.0099	0.0101	0.0009	0.0009	0.0100	0.0101
4*12	0.0010	0.0010	0.0124	0.0126	0.0008	0.0008	0.0088	0.0089	0.0008	0.0009	0.0090	0.0090
6*8					0.0007	0.0007	0.0074	0.0075	0.0007	0.0007	0.0075	0.0075

Tablo 7. $\theta = 0.3$ ve $\eta = 1.3, 1.8$ parametreleri için HKO değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\check{C}O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 0.3, \eta = 1.3$												
3*4					0.0041	0.0041	0.1328	0.1443	0.0041	0.0041	0.1316	0.1321
4*3	0.0050	0.0049	0.1793	0.1744	0.0038	0.0036	0.1154	0.1109	0.0038	0.0035	0.1175	0.1025
6*2					0.0031	0.0030	0.0887	0.0823	0.0031	0.0029	0.0870	0.0782
3*8					0.0019	0.0019	0.0476	0.0472	0.0019	0.0018	0.0485	0.0465
4*6	0.0021	0.0021	0.0618	0.0610	0.0017	0.0017	0.0436	0.0410	0.0017	0.0017	0.0425	0.0409
6*4					0.0015	0.0014	0.0352	0.0325	0.0014	0.0014	0.0338	0.0323
3*12					0.0012	0.0012	0.0292	0.0291	0.0012	0.0012	0.0302	0.0287
4*9	0.0014	0.0014	0.0363	0.0356	0.0011	0.0011	0.0262	0.0247	0.0011	0.0011	0.0262	0.0257
6*6					0.0009	0.0009	0.0215	0.0203	0.0009	0.0009	0.0215	0.0202
3*16					0.0009	0.0009	0.0217	0.0205	0.0009	0.0009	0.0215	0.0209
4*12	0.0010	0.0010	0.0261	0.0255	0.0008	0.0008	0.0186	0.0177	0.0008	0.0008	0.0191	0.0186
6*8					0.0007	0.0007	0.0157	0.0149	0.0007	0.0007	0.0153	0.0150
$\theta = 0.3, \eta = 1.8$												
3*4					0.0043	0.0043	0.2562	0.2741	0.0042	0.0042	0.2592	0.2747
4*3	0.0051	0.0051	0.3757	0.3498	0.0037	0.0038	0.2150	0.2228	0.0038	0.0037	0.2185	0.2165
6*2					0.0031	0.0030	0.1647	0.1592	0.0031	0.0030	0.1605	0.1581
3*8					0.0019	0.0019	0.0939	0.0967	0.0020	0.0019	0.0975	0.0965
4*6	0.0022	0.0023	0.1201	0.1250	0.0017	0.0018	0.0836	0.0824	0.0017	0.0018	0.0804	0.0885
6*4					0.0014	0.0014	0.0641	0.0675	0.0015	0.0014	0.0693	0.0673
3*12					0.0012	0.0013	0.0583	0.0585	0.0012	0.0013	0.0564	0.0609
4*9	0.0014	0.0015	0.0721	0.0716	0.0011	0.0012	0.0517	0.0523	0.0011	0.0012	0.0494	0.0529
6*6					0.0009	0.0009	0.0404	0.0418	0.0010	0.0009	0.0410	0.0412
3*16					0.0009	0.0009	0.0404	0.0420	0.0009	0.0009	0.0394	0.0407
4*12	0.0010	0.0011	0.0490	0.0529	0.0008	0.0008	0.0352	0.0369	0.0008	0.0008	0.0352	0.0368
6*8					0.0007	0.0007	0.0302	0.0303	0.0007	0.0007	0.0292	0.0305

Tablo 8. $\theta = 0.3, 0.7$ ve $\eta = 1.2$ parametreleri için HKO değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 0.3, \eta = 1.2$												
3*4					0.0043	0.0041	0.1177	0.1077	0.0042	0.0040	0.1107	0.1085
4*3	0.0050	0.0050	0.1577	0.1542	0.0037	0.0036	0.0949	0.0912	0.0037	0.0036	0.0961	0.0899
6*2					0.0031	0.0030	0.0719	0.0686	0.0031	0.0030	0.0728	0.0687
3*8					0.0019	0.0019	0.0408	0.0417	0.0019	0.0019	0.0426	0.0404
4*6	0.0022	0.0022	0.0523	0.0524	0.0018	0.0017	0.0361	0.0346	0.0018	0.0017	0.0381	0.0346
6*4					0.0015	0.0014	0.0292	0.0285	0.0015	0.0014	0.0302	0.0274
3*12					0.0012	0.0012	0.0256	0.0243	0.0012	0.0012	0.0255	0.0244
4*9	0.0013	0.0014	0.0304	0.0312	0.0011	0.0011	0.0227	0.0216	0.0011	0.0011	0.0227	0.0209
6*6					0.0010	0.0009	0.0186	0.0171	0.0009	0.0009	0.0178	0.0176
3*16					0.0009	0.0009	0.0178	0.0173	0.0009	0.0009	0.0184	0.0177
4*12	0.0010	0.0010	0.0218	0.0219	0.0008	0.0008	0.0157	0.0155	0.0008	0.0008	0.0155	0.0150
6*8					0.0007	0.0007	0.0128	0.0126	0.0007	0.0007	0.0128	0.0121
$\theta = 0.7, \eta = 1.2$												
3*4					0.0079	0.0072	0.1134	0.1043	0.0076	0.0073	0.1101	0.1019
4*3	0.0136	0.0159	0.1472	0.1470	0.0061	0.0059	0.1017	0.0891	0.0060	0.0058	0.0978	0.0891
6*2					0.0041	0.0041	0.0726	0.0677	0.0043	0.0042	0.0753	0.0684
3*8					0.0033	0.0033	0.0415	0.0408	0.0033	0.0032	0.0425	0.0388
4*6	0.0066	0.0066	0.0525	0.0544	0.0027	0.0026	0.0366	0.0362	0.0027	0.0027	0.0362	0.0361
6*4					0.0019	0.0019	0.0296	0.0269	0.0019	0.0019	0.0296	0.0281
3*12					0.0021	0.0021	0.0253	0.0243	0.0022	0.0021	0.0248	0.0243
4*9	0.0042	0.0041	0.0309	0.0309	0.0017	0.0017	0.0225	0.0211	0.0017	0.0017	0.0219	0.0214
6*6					0.0013	0.0012	0.0187	0.0165	0.0013	0.0013	0.0182	0.0176
3*16					0.0016	0.0016	0.0182	0.0171	0.0016	0.0015	0.0182	0.0173
4*12	0.0030	0.0030	0.0216	0.0216	0.0012	0.0013	0.0157	0.0157	0.0013	0.0012	0.0157	0.0153
6*8					0.0009	0.0009	0.0133	0.0130	0.0009	0.0009	0.0132	0.0126

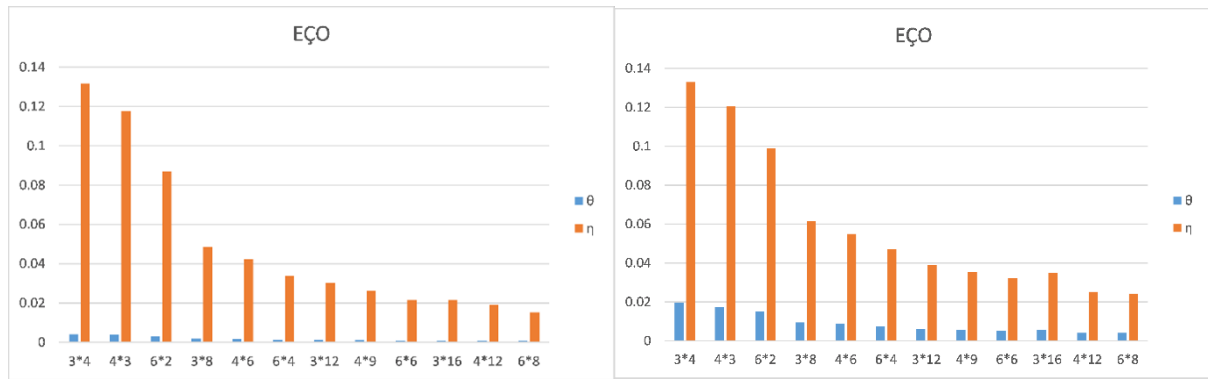
Tablo 9. $\theta = 1.1, 1.4$ ve $\eta = 1.2$ parametreleri için HKO değerleri.

m, r	BRÖ				SKÖ				ÇSKÖ			
	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$	$\hat{\theta}_{E\zeta O}$	$\hat{\theta}_{MoM}$	$\hat{\eta}_{E\zeta O}$	$\hat{\eta}_{MoM}$
$\theta = 1.1, \eta = 1.2$												
3*4					0.0524	0.0511	0.1148	0.1069	0.0561	0.0525	0.1186	0.1105
4*3	0.1190	0.1074	0.1555	0.1447	0.0409	0.0382	0.0978	0.0930	0.0413	0.0371	0.0982	0.0897
6*2					0.0266	0.0247	0.0745	0.0681	0.0272	0.0242	0.0738	0.0663
3*8					0.0186	0.0185	0.0417	0.0410	0.0190	0.0181	0.0418	0.0399
4*6	0.0367	0.0350	0.0531	0.0500	0.0152	0.0139	0.0375	0.0345	0.0146	0.0141	0.0366	0.0345
6*4					0.0105	0.0102	0.0295	0.0284	0.0105	0.0101	0.0288	0.0268
3*12					0.0111	0.0112	0.0247	0.0242	0.0112	0.0122	0.0258	0.0244
4*9	0.0215	0.0218	0.0311	0.0304	0.0092	0.0088	0.0228	0.0219	0.0091	0.0086	0.0218	0.0209
6*6					0.0066	0.0063	0.0184	0.0176	0.0069	0.0064	0.0188	0.0174
3*16					0.0079	0.0080	0.0176	0.0177	0.0081	0.0078	0.0174	0.0174
4*12	0.0156	0.0155	0.0226	0.0220	0.0068	0.0064	0.0161	0.0155	0.0066	0.0065	0.0156	0.0151
6*8					0.0047	0.0048	0.0127	0.0126	0.0048	0.0046	0.0132	0.0121
$\theta = 1.4, \eta = 1.2$												
3*4					0.1703	0.1178	0.1139	0.1075	0.1715	0.1633	0.1170	0.1097
4*3	0.4396	0.3919	0.1567	0.1478	0.1378	0.1333	0.1085	0.0940	0.1378	0.1221	0.1027	0.0906
6*2					0.0885	0.0800	0.0770	0.0670	0.0823	0.0748	0.0720	0.0649
3*8					0.0510	0.0519	0.0403	0.0402	0.0520	0.0515	0.0414	0.0406
4*6	0.1043	0.0997	0.0545	0.0521	0.0414	0.0416	0.0364	0.0357	0.0425	0.0400	0.0364	0.0343
6*4					0.0313	0.0298	0.0295	0.0279	0.0315	0.0287	0.0292	0.0272
3*12					0.0310	0.0299	0.0251	0.0248	0.0302	0.0304	0.0247	0.0248
4*9	0.0557	0.0531	0.0315	0.0305	0.0252	0.0252	0.0217	0.0217	0.0257	0.0245	0.0222	0.0216
6*6					0.0189	0.0177	0.0185	0.0171	0.0189	0.0180	0.0185	0.0177
3*16					0.0212	0.0210	0.0180	0.0172	0.0221	0.0214	0.0180	0.0179
4*12	0.0387	0.0374	0.0217	0.0215	0.0182	0.0173	0.0165	0.0159	0.0182	0.0177	0.0165	0.0159
6*8					0.0135	0.0131	0.0134	0.0129	0.0135	0.0127	0.0134	0.0126

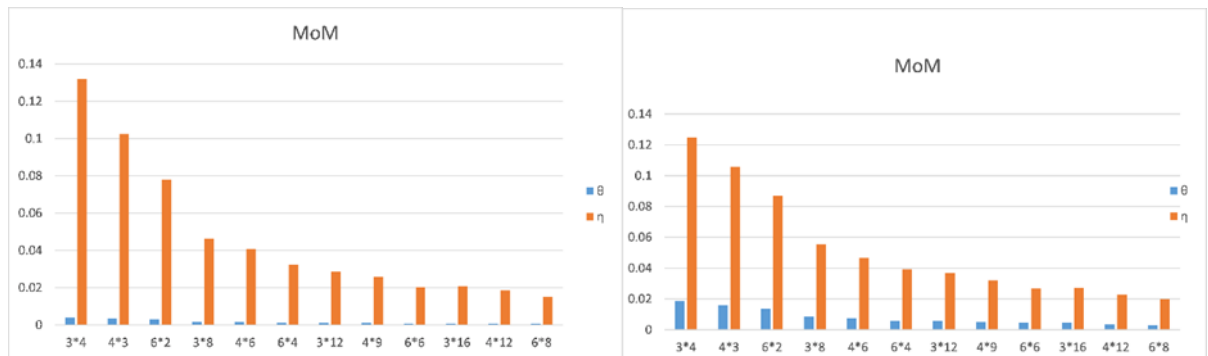
Tablo 2-9 incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir,

- Her bir örnekleme tasarımı için, tahmin edicilerin küme çapı ve döngü sayısı arttıkça HKO'ları azalmaktadır. Bu durum tahmin edicilerin tutarlı olduğunu göstermektedir.
- SKÖ ve ÇSKÖ'ye dayalı θ ve η tahminlerinin, BRÖ'ye dayalı tahminlerden daha düşük yan ve HKO değerlerine sahip olduğu görülmektedir.
- Tablo 2'den açıkça görüldüğü üzere, yanlılık ve HKO açısından, θ ve η 'nin EÇO tahmin edicileri, $\theta=0.3$, $\eta=0.5$ durumunda MoM tahmin edicilerinden daha düşük değerlere sahiptir. Aynı durum $\theta=0.3$, $\eta=0.9$ olduğunda EÇO ve MoM tahmin edicileri için de geçerlidir.
- Öte yandan, Tablo 3-9 incelendiğinde, θ ve η 'nin MoM tahminleri, karşılık gelen EÇO tahminlerinden daha düşük HKO değerlerine sahiptir. Bu da MoM tahminlerinin daha etkin olduğunu göstermektedir.
- Simülasyon sonuçlarından görüldüğü üzere, ÇSKÖ tasarımı altında elde edilen tahminler, SKÖ tasarımı altında elde edilen tahminlerden neredeyse tüm durumlarda daha iyi performans sergilemiştir. Bu durum ÇSKÖ tasarımının PR dağılımının ilgili parametrelerinin tahmininde SKÖ'ye göre daha etkin bir tasarım olduğunu göstermektedir.

Ayrıca simülasyon sonuçlarının grafiksel ifadeler ile daha kolay yorumlanmasını sağlamak amacıyla $\theta=0.3$, $\eta=1.3$ durumu için yan değerleri EÇO ve MoM tahmin edicileri olmak üzere SKÖ ve ÇSKÖ tasarımları için Şekil 5 ve 6 da gösterilmiştir.



Şekil 5. SKÖ ve ÇSKÖ altında $\hat{\theta}_{EÇO}$ ve $\hat{\eta}_{EÇO}$ için yan değerleri.



Şekil 6. SKÖ ve ÇSKÖ altında $\hat{\theta}_{MoM}$ ve $\hat{\eta}_{MoM}$ için yan değerleri.

Sonuçlar

Bu çalışmada, BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ tasarımları altında PR dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahminleri incelenmiştir. EÇO ve MoM olmak üzere iki farklı tahmin yöntemi kullanılmıştır. EÇO ve MoM tahmin edicilerinin performansları, yanlılık ve HKO kriterleri açısından, kapsamlı bir Monte-Carlo simülasyon çalışması kullanılarak BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ tasarımları altında karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçlarına göre, ÇSKÖ'ye dayalı tahmin edicilerin BRÖ ve SKÖ tasarımlarına dayalı tahmin edicilere kıyasla daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, BRÖ, SKÖ ve ÇSKÖ tasarımları için, birkaç durum dışında, MoM tahmin edicisinin, EÇO tahmin edicisinden daha düşük yan ve HKO değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca ÇSKÖ tasarımının, PR dağılımının ilgili parametrelerinin tahmininde, SKÖ'ye göre daha etkin bir tasarım olduğu simülasyon çalışmasıyla ortaya konulmuştur. Bu durum, ÇSKÖ tasarımının hem örnekleme sürecinde daha fazla bilgi kullanması hem de sıralama işlemiyle örnekleme birimlerini sıralamada oluşabilecek hatayı azaltabilmesi sayesinde tahmin doğruluğunu artırabildiğini göstermektedir. Özellikle yığında kümeler arası farklılıkların belirgin olduğu durumlarda, ÇSKÖ'nün tercih edilmesi, tahmin performansını önemli ölçüde iyileştirebilir. Elde edilen sonuçlar, uygulamalı çalışmalarda ÇSKÖ'nün dikkate alınması gereken güçlü bir örnekleme alternatifi olduğunu ortaya koymaktadır. Gelecek çalışmalar için, Power Rayleigh dağılımının parametrelerinin farklı sıralı örnekleme tasarımları altında incelenmesi önerilebilir. Özellikle alternatif sıralama stratejileri kullanan örnekleme yapılarının tahmin performansına etkisi araştırılabilir. Ayrıca, çalışmada kullanılan EÇO ve Momentler yöntemlerine ek olarak, Bayesci yaklaşımlar, robust tahmin ediciler ya da yapay zekâ tabanlı yöntemlerin kullanılması, farklı tahmin doğrulukları sağlayarak literatüre katkı sunabilir.

Teşekkür

Fon/Finansman Bilgileri Herhangi bir kurum veya kuruluş tarafından desteklenmemiştir.

Etik Kurul Onay ve İzinler Çalışma, etik kurul izni veya herhangi bir özel izin gerektirmemektedir.

Çıkar Çatışmaları/Çatışan Çıkarlar Herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

Yazarların Katkısı Yazarlar çalışmaya eşit oranda katkı sağlamıştır. Yazarlar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

Kaynaklar

- [1] McIntyre, G. A. (1952). A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research*, 3(4), 385-390. <https://doi.org/10.1071/AR9520385>
- [2] Takahasi, K., & Wakimoto, K., (1968). On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. *annals of the institute of statistical Mathematics*, 21, 249-255. <https://doi.org/10.1007/BF02911622>
- [3] Dell, D. R., & Clutter, J. L. (1972). Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, 28(2), 545-555. <https://doi.org/10.2307/2556166>

- [4] Samawi, H. M., Ahmed, M. S., & Abu-Dayyeh, W. (1996). Estimating the population mean using extreme ranked set sampling. *Biometrical Journal*, 38(5), 577-586. <https://doi.org/10.1002/bimj.4710380506>
- [5] Muttalak, H. A. (1997). Median ranked set sampling. *Journal of Applied Statistical Science*, 6, 245-255. <https://doi.org/10.12691/ajams-6-5-5>
- [6] Al-Saleh M. F., & Al-Hadrami S. A. (2003). Parametric estimation for the location parameter for symmetric distributions using moving extremes ranked set sampling with application to trees data. *Environmetrics: The Official Journal of the International Environmetrics Society*, 14(7), 651-664. <https://doi.org/10.1002/env.610>
- [7] Al-Nasser, A. D. (2007). L ranked set sampling: A generalization procedure for robust visual sampling. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*®, 36(1), 33-43. <https://doi.org/10.1080/03610910601096510>
- [8] Bani-Mustafa A., Al-Nasser A. D., & Aslam M. (2011). Folded ranked set sampling for asymmetric distributions. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 18(1):147-153. <https://doi.org/10.5351/CKSS.2011.18.1.147>
- [9] Al-Saleh, M. F., & Al-Kadiri, M. A. (2000). Double-ranked set sampling. *Statistics & Probability Letters*, 48(2), 205-212. [https://doi.org/10.1016/S0167-7152\(99\)00206-0](https://doi.org/10.1016/S0167-7152(99)00206-0)
- [10] Haq, A., Brown, J., Moltchanova, E., & Al-Omari, A. I. (2016). Paired double-ranked set sampling. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(10), 2873-2889. <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1122043>
- [11] Hashemi Majd, M. H., & Saba, R. A. (2018). Robust extreme double ranked set sampling. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(9), 1749-1758. <https://doi.org/10.1080/00949655.2018.1446212>
- [12] Khan, L., Shabbir, J., & Khalil, U. (2019). A new systematic ranked set-sampling scheme for symmetric distributions. *Life Cycle Reliability and Safety Engineering*, 8, 205-210. <https://doi.org/10.1007/s41872-019-00080-5>
- [13] Samuh, M. H., Omar, M. H., & Hossain, M. P. (2021). Mixed double-ranked set sampling: A more efficient and practical approach. *REVSTAT-Statistical Journal*, 19(1), 145-160. <https://doi.org/10.17713/ajs.v49i1.908>
- [14] Hanandeh, A., Al-Nasser, A. D., & Al-Omari, A. I. (2022). New double stage ranked set sampling for estimating the population mean. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 15(2), 463-478. <https://doi.org/10.1285/i20705948v15n2p485>
- [15] Helu, A., Abu-Salih, M., & Alkam, O. (2010). Bayes estimation of Weibull distribution parameters using ranked set sampling. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 39(14), 2533-2551. <https://doi.org/10.1080/03610920903061039>
- [16] Al-Omari, A. I., & Al-Hadrami, S. A. (2011). On maximum likelihood estimators of the parameters of a modified Weibull distribution using extreme ranked set sampling. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 10(2), 18. <https://doi.org/10.22237/jmasm/1320121020>
- [17] Elbatal, I. (2011). Parameters estimation of the log-logistic distribution using ranked set sampling. *Journal of Applied Statistical Science*, 19(1), 129.

- [18] Omar, A., & Ibrahim, K. (2013). Estimation of the shape and scale parameters of the pareto distribution using extreme ranked set sampling. *Pakistan Journal of Statistics*, 29(1). <https://doi.org/10.1007/s00362-011-01132-9>
- [19] Hassan, A. S. (2013). Maximum likelihood and Bayes estimators of the unknown parameters for exponentiated exponential distribution using ranked set sampling. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 3(1), 720-725.
- [20] Hussian, M. A. (2014). Bayesian and maximum likelihood estimation for Kumaraswamy distribution based on ranked set sampling. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 4(1), 30-37. <https://doi.org/10.5923/j.ajms.20140401.05>
- [21] Yousef, O. M., & Al-Subh, S. A. (2014). Estimation of Gumbel parameters under ranked set sampling. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 13(2), 24. <https://doi.org/10.22237/jmasm/1414815780>
- [22] Koshti, R. D., & Kamalja, K. K. (2017). Estimation of scale parameter of a bivariate Lomax distribution by ranked set sampling. *Model Assisted Statistics and Applications*, 12(2), 107-113. <https://doi.org/10.3233/MAS-170387>
- [23] Khamnei, H. J., & Abusaleh, S. (2017). Estimation of parameters in the generalized logistic distribution based on ranked set sampling. *International Journal of Nonlinear Science*, 24(3), 154-160. <https://doi.org/10.3233/MAS-17038>
- [24] Dey, S., Raheem, E., Mukherjee, S., & Ng, H. K. T. (2017). Two parameter exponentiated Gumbel distribution: properties and estimation with flood data example. *Journal of Statistics and Management Systems*, 20(2), 197-233. <https://doi.org/10.1080/09720510.2016.1228261>
- [25] Esemen, M., & Gürler, S. (2018). Parameter estimation of generalized Rayleigh distribution based on ranked set sample. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(4), 615-628. <https://doi.org/10.1080/00949655.2017.1398256>
- [26] He, X., Chen, W., & Qian, W. (2018). Maximum likelihood estimators of the parameters of the log-logistic distribution. *Statistical Papers*, 61(5), 1875-1892. <https://doi.org/10.1007/s11766-021-3720-y>
- [27] Samuh, M. H., Al-Omari, A. I., & Koyuncu, N. (2020). Estimation of the parameters of the new Weibull-Pareto distribution using ranked set sampling. <https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/9368>
- [28] Taconeli, C. A., & Giolo, S. R. (2020). Maximum likelihood estimation based on ranked set sampling designs for two extensions of the Lindley distribution with uncensored and right-censored data. *Computational Statistics*, 35(4), 1827-1851. <https://doi.org/10.1007/s00180-020-00953-9>
- [29] Yang, R., Chen, W., Yao, D., Long, C., Dong, Y., & Shen, B. (2020). The efficiency of ranked set sampling design for parameter estimation for the log-extended exponential-geometric distribution. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 44(2), 497-507. <https://doi.org/10.1007/s40995-020-00855-x>
- [30] Koshti, R. D., & Kamalja, K. K. (2021). Parameter estimation of Cambanis-type bivariate uniform distribution with ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*, 48(1), 61-83. <https://doi.org/10.1080/02664763.2019.1709808>

- [31] Pedroso, V. C., Taconeli, C. A., & Giolo, S. R. (2021). Estimation based on ranked set sampling for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(2), 316-333. <https://doi.org/10.1080/00949655.2020.1814287>
- [32] Al-Omari, A. I., Benchiha, S., & Almanjahie, I. M. (2021). Efficient estimation of the generalized Quasi-Lindley distribution parameters under ranked set sampling and applications. *Mathematical Problems in Engineering*, (1), 1-17. <https://doi.org/10.1155/2021/5543890>
- [33] Sabry, M. H., & Almetwally, E. M. (2021). Estimation of the exponential pareto distributions parameters under ranked and double ranked set sampling designs. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 17,(1), 169-184. <http://dx.doi.org/10.18187/pjsor.v17i1.3448>
- [34] He, X. F., Chen, W. X., & Yang, R. (2021). Log-logistic parameters estimation using moving extremes ranked set sampling design. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 36(1), 99-113. <https://doi.org/10.1007/s11766-021-3720-y>
- [35] Chen, W., Yang, R., Yao, D., & Long, C. (2021). Pareto parameters estimation using moving extremes ranked set sampling. *Statistical Papers*, 62(3), 1195-1211. <https://doi.org/10.1007/s00362-020-01195-4>
- [36] Sevil, Y. C., & Yildiz, T. O. (2022). Gumbel's bivariate exponential distribution: estimation of the association parameter using ranked set sampling. *Computational Statistics*, 37, 1695-1726. <https://doi.org/10.1007/s00180-021-01176-2>
- [37] Al-Omari, A. I., Benchiha, S., & Almanjahie, I. M. (2022). Efficient estimation of two-parameter Xgamma distribution parameters using ranked set sampling design. *Mathematics*, 10(17), 3170. <https://doi.org/10.3390/math10173170>
- [38] Nagy, H. F., Al-Omari, A. I., Hassan, A. S., & Alomani, G. A. (2022). Improved estimation of the inverted Kumaraswamy distribution parameters based on ranked set sampling with an application to real data. *Mathematics*, 10(21), 4102. <https://doi.org/10.3390/math10214102>
- [39] Sabry, M. A. E., Muhammed, H. Z., Shaaban, M. & Nabih, A. E. H. (2022). Parameter estimation based on double ranked set samples with applications to Weibull distribution. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 52(1), 267-277. <https://doi.org/10.22237/jmasm/1637641960>
- [40] Yang, R., Chen, W., & Dong, Y. (2023). Log-extended exponential-geometric parameters estimation using simple random sampling and moving extremes ranked set sampling. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 19(1), 25. <https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2154465>
- [41] Yeniay Koçer, N., Özdemir, Y. A., & Gökpinar, F. (2020). Sıralı küme örnekleme ile iki yığın ortalaması farkı için bootstrap güven aralıklarının incelenmesi. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 10(3), 651-661. <https://doi.org/10.17714/gumusfenbil.647804>
- [42] Rayleigh, L. (1880). XII. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10(60), 73-78. <https://doi.org/10.1080/14786448008626893>
- [43] Bhat, A. A., & Ahmad, S. P. (2020). A new generalization of Rayleigh distribution: properties and applications. *Pakistan Journal of Statistics*, 36(3).