C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
10.1 (2014) 33 – 43 10.1 (2014) 33 – 43

BİRİM KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE APOLLONIAN EĞRİLERİ

Melike AY[1*], Mustafa KAZAZ[1]

[1]Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 45140 Manisa, TÜRKİYE

Özet: $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde P ve Q verilen iki sabit nokta olsun. P ve Q noktalarından uzaklıkları sabit bir $m:n$ oranında olan tüm X noktalarının geometrik yerinin bir çember olduğu iyi bilinir, burada m, n ($m \neq n$) pozitif tamsayılardır. Bu çember Apollonius'ın çemberi (veya Apollonian çemberi) olarak bilinir [Brannan-Esplen-Gray, 1]. Eğer $m=n$ ise, $d(P,X):d(Q,X)=1:1$ olacak şekildeki X noktalarının geometrik yeri ise $[PQ]$ doğru parçasının orta dikme doğrusudur. Bu makalede, S^2 birim küre yüzeyi üzerinde Apollonian eğrileri tanımlanmış ve bu eğrilerin küre yüzeyi üzerinde düzlemsel eğriler (büyük çemberler) ve düzlemsel olmayan eğriler olduğu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Apollonian eğrisi, Birim küre, Büyük çember*.

APOLLONIAN CURVES ON THE SURFACE OF THE UNIT SPHERE

Abstract: Let P and Q be two given fixed points in the Euclid plane $\mathbb{R}^2$. It is well known that the locus of points X whose distances from the points P and Q are in a constant ratio $m:n$ is a circle, where m, n $(m \neq n)$ are some positive integers. This circle is known as the circle of Apollonius (or Apollonian circle) [Brannan-Esplen-Gray, 1]. If $m=n$, the locus of points X such that $d(P,X):d(Q,X)=1:1$ is the perpendicular bisector of the line segment $[PQ]$. In this paper, Apollonian curves on the surface of the unit sphere S^2 is defined, and these curves were obtained as planar curves (great circles) and non-planar curves on the sphere.

Keywords: *Apollonian Curve, Unit Sphere, Great circle*

***Melike AY**
mel1keay@hotmail.com

1. GİRİŞ

S^2 birim küre yüzeyi üzerinde P ve Q farklı iki nokta ve $m, n\ (n \neq 0)$ tamsayılar olmak üzere; $d(P,X):d(Q,X)=m:n$ oranını sağlayan küre yüzeyi üzerindeki X noktalarının geometrik yeri Apollonian eğrisi olarak tanımlanır. Böyle bir eğrinin küre yüzeyi üzerinde bir büyük çember veya düzlemsel olmayan bir eğri olduğu elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, vektörler ile ilgili temel kavramlar ve eğriler teorisi özet olarak verilecektir [Do Carmo 2], [Oprea, 3].

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ ve $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ gibi iki vektörün iç çarpımı

$<,>:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ <\vec{p},\vec{q}>=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$

şeklinde tanımlanan bir reel sayıdır.

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^3$ de $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ ve $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı

$\vec{p}\times\vec{q}=(p_2q_3-p_3q_2,\ p_3q_1-p_1q_3,\ p_1q_2-p_2q_1)$

olarak tanımlanan $\mathbb{R}^3$ de yeni bir vektördür.

Bir $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ vektörünün uzunluğu (veya normu) $\|\vec{p}\|=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$ olarak tanımlanır. Eğer $\|\vec{p}\|=1$ ise $\vec{p}$ vektörüne birim vektör denir. İç çarpım ve vektörel çarpım ile ilgili aşağıdaki özellikleri verebiliriz:

(a) $\|\vec{p}\|^2=<\vec{p},\vec{p}>$;

(b) $<\vec{p},\vec{q}>=\|\vec{p}\|\|\vec{q}\|\cos\theta$, burada θ, $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri arasındaki açıdır;

(c) $\langle\vec{p},\vec{q}\rangle=0$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin dik olmasıdır;

(d) Eğer $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri lineer bağımsız ise bu takdirde $\vec{p}\times\vec{q}$ vektörü $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin her ikisine de diktir;

(e) $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{0}$ dır.

Bundan böyle $\mathbb{R}^3$ ü 3-boyutlu Öklid uzayı olarak alacağız.

Tanım 2.3. $\mathbb{R}$ reel eksenin bir I açık aralığının $\mathbb{R}^3$ içine sürekli bir

$\alpha:I\to\mathbb{R}^3,\ \alpha(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)),\ \ t\in I,$

diferansiyellenebilir dönüşümüne $\mathbb{R}^3$ de bir eğri denir. Burada $\alpha(t)$ bir karşılık getirmedir, yani, $\alpha(t)$ her $t\in I$ için $\mathbb{R}^3$ de bir $(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ noktasına karşılık gelir. Burada, $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. t ye α eğrisinin parametresi denir. $\alpha(t)\subset\mathbb{R}^3$ görüntü kümesine α eğrisinin $\mathbb{R}^3$ deki izi veya grafiği denir.

Tanım.2.4. $\alpha:I\to\mathbb{R}^3,\ \alpha(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ bir eğri olsun. $x_i(t),\ (1\le i\le 3)$ fonksiyonlarının t ye göre birinci türevleri $x_1'(t),\ x_2'(t),\ x_3'(t)$ olmak üzere $\vec{\alpha}'(t_0)=(x_1'(t_0),x_2'(t_0),x_3'(t_0))$ vektörüne, $\alpha(t)$ eğrisinin $t_0\in I$ noktasındaki teğet vektörü (veya hız vektörü) denir. $\|\vec{\alpha}'(t_0)\|$ sayısına da α eğrisinin t_0 anındaki hızı denir. Eğer her $t\in I$ için $\|\vec{\alpha}'(t)\|=1$ ise α eğrisine birim hızlı bir eğri denir. Eğer her $t\in I$ için $\vec{\alpha}'(t)\neq\vec{0}$ ise α eğrisine bir regüler (düzgün) eğri denir.

Tanım 2.5. Regüler bir $\alpha(t)$ eğrisinin bir t_0 değerinden t değerine kadar olan yay uzunluğu $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\vec{\alpha}'(t)\|dt$ olarak tanımlanır. Burada, $\|\vec{\alpha}'(t)\|=\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2+(x_3'(t))^2}$ dır.

Tanım 2.6. Eğer $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ eğrisi s yay uzunluğu parametreli (yani, birim hızlı) bir eğri ise bu takdirde α eğrisinin eğriliği $\kappa(s)=\|\vec{\alpha}''(s)\|$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.7. Herhangi bir $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}$, asli normal vektörü $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$ ve binormal vektörü

$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.8. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin burulması
$\tau(s) = -< \vec{B}'(s), \vec{N}(s) >$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.1. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ herhangi bir eğri olsun. Bu takdirde,

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \quad \vec{B}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|},$$

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t), \quad \kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3},$$

$$\tau(t) = \frac{< \vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t) >}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|^2} \text{ dir.}$$

Tanım 2.9. Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemsel eğri denir.

Tanım 2.10. Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri adı verilir.

Teorem 2.2. Eğriliği $\kappa > 0$ olan bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir düzlemsel eğri olması için gerek ve yeter koşul $\tau = 0$ olmasıdır.

Teorem 2.3. Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi bir çemberdir (veya çember parçasıdır) ancak ve ancak eğrilik $\kappa > 0$ sabittir ve burulma $\tau = 0$ dır.

3. S^2 BİRİM KÜRE YÜZEYİ ÜZERİNDE APOLLONIAN EĞRİLERİ

Bu kısımda,

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

birim küre yüzeyi üzerinde Apollonian eğrileri ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 3.1. O merkezli S^2 birim küre yüzeyi üzerinde farklı iki nokta $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ olsun. P ve Q noktaları arasındaki geodezik uzaklık d ise, bu durumda POQ açısı da d ye eşittir. Ayrıca P ve Q noktalarına karşılık gelen $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörleri için

$$< \vec{p}, \vec{q} >= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| \cos d = 1.1. \cos d$$

yazılabilir. Böylece, S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ noktaları arasındaki küresel uzaklık

$$\cos d =< \vec{p}, \vec{q} >= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

ile verilir. Buradan, d uzaklığı için

$$d(P, Q) = \cos^{-1}(< \vec{p}, \vec{q} >)$$

yazılabilir.

Tanım 3.2. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde P ve Q farklı iki nokta ve m, n $(n \neq 0)$ tamsayılar olmak üzere; $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan küre yüzeyi üzerindeki X noktalarının geometrik yerine küresel Apollonian eğrisi (veya Apollonius'ın eğrisi) adı verilir ve $Ap(P, Q; m : n)$ ile gösterilir. Eğer $m = n$ ise $Ap(P, Q; 1 : 1)$ küresel Apollonian eğrisi küre yüzeyi üzerinde bir düzlemsel eğri (büyük çember) ve $m \neq n$ ise düzlemsel olmayan bir eğri belirttiği gösterilecektir.

Teorem 3.1. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ farklı iki nokta ve m, n $(n \neq 0)$ pozitif tamsayılar olsun. Bu takdirde $d(P, X) : d(Q, X) = m : n$ oranını sağlayan $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının $Ap(P, Q; m : n)$ geometrik yeri;

a) $m = n$ ise bir düzlemsel eğridir.

b) $m \neq n$ ise bir düzlemsel olmayan eğridir.

İspat: a) $m = n$ olsun. Bu takdirde,

$$Ap(P, Q; 1 : 1) = \left\{ X \,\middle|\, d(X, P) = d(X, Q), X \in S^2 \right\}$$

kümesini bulmalıyız. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri, sırasıyla, P ve Q noktalarının konum vektörleri olmak üzere, $\vec{r}$ vektörünü

$$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, açık olarak $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ vektörleri lineer bağımsız vektörlerdir. $d(X, P) = \sigma,\ d(X, Q) = \beta,\ d(X, R) = \theta$ diyelim. Bu takdirde, $d(X, P) = d(X, Q)$ olduğundan $\sigma = \beta$ dır. Diğer taraftan, S^2 birim küresi üzerindeki herhangi bir X noktasının konum vektörü olan $\vec{x}$ için

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$

yazabiliriz. Buradan $\vec{x}$ vektörü ile sırasıyla, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ vektörlerinin iç çarpımları alınırsa,

$$< \vec{x}, \vec{p} >= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{p} \rangle = \lambda_1 + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{p} \rangle,$$
$$< \vec{x}, \vec{q} >= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{q} \rangle = \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + \lambda_2,$$
$$< \vec{x}, \vec{r} >= \lambda_1 \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle + \lambda_3 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \lambda_3$$

eşitliklerini buluruz. Buradan,

$< \vec{x}, \vec{p} >= \cos\sigma,\ < \vec{x}, \vec{q} >= \cos\beta,\ < \vec{x}, \vec{r} >= \cos\theta$

olduğundan

$$\lambda_1 + \lambda_2 < \vec{q}, \vec{p} >= \cos\sigma,$$
$$\lambda_1 < \vec{p}, \vec{q} > + \lambda_2 = \cos\beta,$$
$$\lambda_3 = \cos\theta$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden bilinmeyen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerini bulmalıyız. Küre üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$\delta = d(P,Q) = \cos^{-1}(< \vec{p}, \vec{q} >)$

dersek, $\cos\delta =< \vec{p}, \vec{q} >$ olur. Bu eşitlik denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos\delta = \cos\sigma$$
$$\lambda_1 \cos\delta + \lambda_2 = \cos\beta$$
$$\lambda_3 = \cos\theta$$

bulunur. Birinci denklem $-\cos\delta$ ile çarpılır ve ikinci denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$\lambda_2 \left(1 - \cos^2\delta\right) = \cos\beta - \cos\sigma\cos\delta$$

elde edilir. Buradan da

$\lambda_2 = \dfrac{\cos\beta - \cos\sigma\cos\delta}{1 - \cos^2\delta}$ bulunur. Şimdi, bu değer $\lambda_1 = \cos\sigma - \lambda_2 \cos\delta$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\lambda_1 = \cos\sigma - \frac{\cos\beta - \cos\sigma\cos\delta}{1 - \cos^2\delta}\cos\delta$$
$$= \frac{\cos\sigma - \cos\sigma\cos^2\delta - \cos\beta\cos\delta + \cos\sigma\cos^2\delta}{1 - \cos^2\delta}$$
$$= \frac{\cos\sigma - \cos\beta\cos\delta}{1 - \cos^2\delta}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\sigma = \beta$ olduğundan $\cos\sigma = \cos\beta$ dır. Böylece,

$$\lambda_1 = \frac{\cos\sigma - \cos\beta\cos\delta}{1 - \cos^2\delta}$$
$$= \frac{\cos\sigma(1 - \cos\delta)}{(1 - \cos\delta)(1 + \cos\delta)}$$
$$= \frac{\cos\sigma}{(1 + \cos\delta)}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{\cos\beta - \cos\sigma\cos\delta}{1 - \cos^2\delta}$$
$$= \frac{\cos\sigma(1 - \cos\delta)}{(1 - \cos\delta)(1 + \cos\delta)}$$
$$= \frac{\cos\sigma}{(1 + \cos\delta)}$$

elde edilir, yani

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos\sigma}{(1 + \cos\delta)} = \frac{\cos\sigma}{(1 + < \vec{p}, \vec{q} >)}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r}$$
$$= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 q_1 + \lambda_3 r_1, \lambda_1 p_2 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 r_2, \lambda_1 p_3 + \lambda_2 q_3 + \lambda_3 r_3)$$

ve $X \in S^2$ (ve dolayısıyla $\|\vec{x}\| = 1$) olduğundan

$$\lambda_1^2 p_1^2 + \lambda_2^2 q_1^2 + \lambda_3^2 r_1^2 +$$
$$2(\lambda_1 p_1 \lambda_2 q_1 + \lambda_1 p_1 \lambda_3 r_1 + \lambda_2 q_1 \lambda_3 r_1) +$$
$$\lambda_1^2 p_2^2 + \lambda_2^2 q_2^2 + \lambda_3^2 r_2^2 +$$
$$2(\lambda_1 p_2 \lambda_2 q_2 + \lambda_1 p_2 \lambda_3 r_2 + \lambda_2 q_2 \lambda_3 r_2) +$$
$$\lambda_1^2 p_3^2 + \lambda_2^2 q_3^2 + \lambda_3^2 r_3^2 +$$
$$2(\lambda_1 p_3 \lambda_2 q_3 + \lambda_1 p_3 \lambda_3 r_3 + \lambda_2 q_3 \lambda_3 r_3) = 1$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\lambda_3^2 \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) +$$
$$\lambda_3 \left(2\lambda_2 (q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3) +\right.$$
$$\left. 2\lambda_1 (p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3)\right) +$$
$$2\lambda_1 \lambda_2 (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) +$$
$$\lambda_1^2 \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) +$$
$$\lambda_2^2 \left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right) - 1 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Buradan, $\|\vec{p}\| = 1, \|\vec{q}\| = 1, \|\vec{r}\| = 1$ ve $\vec{p} \perp \vec{r},\ \vec{q} \perp \vec{r}$ oldukları kullanılırsa,

$$\lambda_3^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1 = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lambda_3 = \mp\sqrt{1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 < \vec{p}, \vec{q} >)}$$

dır. Son olarak, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{\cos\sigma}{(1+ <\vec{p}, \vec{q}>)}$ değerleri λ_3 de yerine yazılırsa

$$\lambda_3 = \mp\sqrt{1-\frac{2\cos^2\sigma}{1+<\vec{p}, \vec{q}>}}$$

bulunur. Böylece

$$\vec{x}(\sigma) = Ap(P,Q;\, 1:1) =$$

$$\frac{\cos\sigma}{1+<\vec{p}, \vec{q}>}\,\vec{p} + \frac{\cos\sigma}{1+<\vec{p}, \vec{q}>}\,\vec{q} \mp \sqrt{1-\frac{2\cos^2\sigma}{1+<\vec{p}, \vec{q}>}}\,\vec{r}$$

vektörü tek bir σ parametresine indirgenmiş olur. Bu ise $\dfrac{2\cos^2\sigma}{1+<\vec{p}, \vec{q}>} \le 1$ koşulunu sağlayan σ değerleri için istenen eğriyi verir.

c) Şimdi $m \neq n$ olsun. Bu takdirde

$$Ap(P,Q;m:n) = \{X \in S^2 \,|\, d(X,P) : d(X,Q) = m:n\}$$

kümesini belirleyeceğiz. $\vec{r}$ vektörünü

$$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = \frac{\vec{p}\times\vec{q}}{\|\vec{p}\times\vec{q}\|}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\vec{p}$, $\vec{q}$ ve $\vec{r}$ vektörleri lineer bağımsız olurlar. Şimdi, $d(X,P) = \sigma$, $d(X,Q) = \beta$, $d(X,R) = \theta$ ve $k = \dfrac{m}{n}$ diyelim. Bu durumda, $\sigma = k\beta$ olur. S^2 üzerinde herhangi bir X noktasına karşılık gelen konum vektörünü

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r}\ ,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1,2,3,$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan, $\vec{x}$ vektörü ile sırasıyla $\vec{p}$, $\vec{q}$ ve $\vec{r}$ vektörlerinin iç çarpımları alınırsa

$$<\vec{x},\vec{p}> = \lambda_1 <\vec{p},\vec{p}> + \lambda_2 <\vec{q},\vec{p}> + \lambda_3 <\vec{r},\vec{p}>$$
$$= \lambda_1 + \lambda_2 <\vec{q},\vec{p}>,$$
$$<\vec{x},\vec{q}> = \lambda_1 <\vec{p},\vec{q}> + \lambda_2 <\vec{q},\vec{q}> + \lambda_3 <\vec{r},\vec{q}>$$
$$= \lambda_1 <\vec{p},\vec{q}> + \lambda_2,$$
$$<\vec{x},\vec{r}> = \lambda_1 <\vec{p},\vec{r}> + \lambda_2 <\vec{q},\vec{r}> + \lambda_3 <\vec{r},\vec{r}>$$
$$= \lambda_3$$

eşitliklerini buluruz.

$$<\vec{x},\vec{p}> = \cos\sigma,\ <\vec{x},\vec{q}> = \cos\beta,\ \ <\vec{x},\vec{r}> = \cos\theta$$

ifadeleri yerine yazılırsa

$$\lambda_1 + \lambda_2 <\vec{q},\vec{p}> = \cos\sigma$$
$$\lambda_1 <\vec{p},\vec{q}> + \lambda_2 = \cos\beta$$
$$\lambda_3 = \cos\theta$$

denklem sistemini elde ederiz. Diğer taraftan, küre üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık formülünde $\delta = d(P,Q) = \cos^{-1}(<\vec{p},\vec{q}>)$ dersek $\cos\delta = <\vec{p},\vec{q}>$ olur. Buradan

$$\lambda_1 + \lambda_2\cos\delta = \cos\sigma$$
$$\lambda_1\cos\delta + \lambda_2 = \cos\beta$$
$$\lambda_3 = \cos\theta$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde ikinci denklem $-\cos\delta$ ile çarpılır ve birinci denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$\lambda_1(1-\cos^2\delta) = \cos\sigma - \cos\beta\cos\delta$$

elde edilir. Buradan da

$$\lambda_1 = \frac{\cos\sigma - \cos\beta\cos\delta}{1-\cos^2\delta}$$

bulunur. Şimdi $\sigma = k\beta$ olduğundan

$$\lambda_1 = \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta\cos\delta}{1-\cos^2\delta}$$
$$= \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}$$

elde edilir. Bu değer $\lambda_2 = \cos\beta - \lambda_1\cos\delta$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda_2 = \cos\beta - \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta\cos\delta}{1-\cos^2\delta}\cos\delta$$
$$= \frac{\cos\beta - \cos(k\beta)\cos\delta}{1-\cos^2\delta}$$
$$= \frac{\cos\beta - \cos(k\beta) <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan, $\|\vec{x}\| = 1$ ve

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 q_1 + \lambda_3 r_1,$$
$$\lambda_1 p_2 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 r_2,\ \lambda_1 p_3 + \lambda_2 q_3 + \lambda_3 r_3)$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\lambda_1^2 p_1^2 + \lambda_2^2 q_1^2 + \lambda_3^2 r_1^2 +$$
$$2(\lambda_1 p_1\lambda_2 q_1 + \lambda_1 p_1\lambda_3 r_1 + \lambda_2 q_1\lambda_3 r_1) +$$
$$\lambda_1^2 p_2^2 + \lambda_2^2 q_2^2 + \lambda_3^2 r_2^2 +$$
$$2(\lambda_1 p_2\lambda_2 q_2 + \lambda_1 p_2\lambda_3 r_2 + \lambda_2 q_2\lambda_3 r_2) +$$
$$\lambda_1^2 p_3^2 + \lambda_2^2 q_3^2 + \lambda_3^2 r_3^2 +$$
$$2(\lambda_1 p_3\lambda_2 q_3 + \lambda_1 p_3\lambda_3 r_3 + \lambda_2 q_3\lambda_3 r_3) = 1$$

dir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 < \vec{p},\vec{q} > + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Böylece λ_1 ve λ_2 nin değerleri yerine yazılırsa

$$\lambda_3 = \pm\sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta < \vec{p},\vec{q} >}{1 - (< \vec{p},\vec{q} >)^2}}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\vec{x}(\beta) = Ap(P,Q;m:n) = \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta < \vec{p},\vec{q} >}{1 - (< \vec{p},\vec{q} >)^2}\vec{p}$$

$$+ \frac{\cos\beta - \cos(k\beta) < \vec{p},\vec{q} >}{1 - (< \vec{p},\vec{q} >)^2}\vec{q}$$

$$\mp\sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta < \vec{p},\vec{q} >}{1 - (< \vec{p},\vec{q} >)^2}}\vec{r}$$

vektörü tek bir β parametresine indirgenmiş olur. Bu ise

$$1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta < \vec{p},\vec{q} >}{1 - (< \vec{p},\vec{q} >)^2} \geq 0$$

koşulunu sağlayan β değerleri için istenen eğriyi verir.

Örnek 3.1. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde farklı iki nokta $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $Q\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olsun. Bu durumda, $d(P,X) : d(Q,X) = 1:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1, x_2, x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım. P ve Q noktalarının $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörleri için $\vec{r} = \frac{\vec{p}\times\vec{q}}{\|\vec{p}\times\vec{q}\|} = (1,\ 0,\ 0)$ dır. Diğer taraftan $< \vec{p},\vec{q} > = 0.0 + \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$ olduğundan $\cos\delta = < \vec{p},\vec{q} > = \frac{1}{2}$ dir. Şimdi, $\vec{x}$ vektörünü $\vec{p},\ \vec{q}$ ve $\vec{r}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = \left(\lambda_3,\ \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right)$$

Yazabiliriz. Buradan, Teorem 3.1 (a) dan

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\cos\sigma}{1 + < \vec{p},\vec{q} >} \text{ ve } \lambda_3 = \mp\sqrt{1 - \frac{2\cos^2\sigma}{1 + < \vec{p},\vec{q} >}}$$

olacağından $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}\cos\sigma$ ve

$\lambda_3 = \mp\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\sigma}$ elde edilir. Böylece,

$$\vec{x}(\sigma) = \frac{2}{3}\cos\sigma\ \vec{p} + \frac{2}{3}\cos\sigma\ \vec{q} \mp \sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\sigma}\ \vec{r}$$

$$= \left(\mp\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\sigma},\ 0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\sigma\right)$$

$$= \left(\mp\frac{1}{3}\sqrt{9 - 12\cos^2\sigma},\ 0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\sigma\right)$$

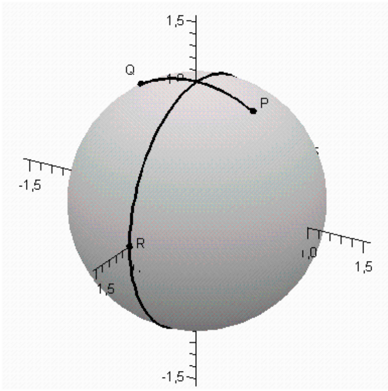
dır. Burada, eğrimiz $1 - \frac{4}{3}\cos^2\sigma \geq 0$ koşulunu sağlayan σ değerleri için tanımlıdır. Yani, eğrimiz $\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \cos\sigma \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ koşulunu sağlayan σ değerlerine karşılık gelir. Eğrimizin parametrik ifadesine bakıldığında $xz-$düzleminde yatan bir büyük çember olduğu görülür (Şekil 1). Diğer taraftan, Maple programı ile yapılan aşağıdaki hesaplama sonucunda da eğrimizin eğriliğinin $\kappa = 1$, burulmasının $\tau = 0$ olduğu ve dolayısıyla, bir düzlemsel eğri olduğu görülür.

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(x)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,sigma);
> Xtt:=diff(Xt,sigma);
>RETURN(kappa=abs(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))/((nrm(Xt))^3),symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,sigma);
> Xtt:=diff(Xt,sigma);
```

```
> Xttt:=diff(Xtt,sigma);
>RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/(nrm(xp(Xt,Xtt))^2),symbolic));
> end:
> X:=[(sqrt(1-4/3*(cos(sigma)*cos(sigma)))), 0, 2*((sqrt(3))/3)*cos(sigma)];
```

$$X := \left[\frac{1}{3}\sqrt{9-12\cos(\sigma)^2},\, 0,\, \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(\sigma) \right]$$

> curv(X); $\kappa = 1$, > tor(X); $\tau = 0$.



Şekil 1

Örnek 3.2. S^2 birim küre yüzeyi üzerinde farklı iki nokta $P\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $Q\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olsun. $d(P,X):d(Q,X)=2:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1,x_2,x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım. P ve Q noktalarına karşılık gelen $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörleri için $\vec{r} = \frac{\vec{p}\times\vec{q}}{\|\vec{p}\times\vec{q}\|} = (1,0,0)$ bulunur. Ayrıca, $<\vec{p},\vec{q}> = \frac{1}{2}$ olduğundan $\cos\delta = \frac{1}{2}$ dır. $k = \frac{m}{n} = 2$ olduğundan $\sigma = 2\beta$ dır. Böylece $\cos\sigma = \cos 2\beta$ dır. Diğer taraftan,

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = \left(\lambda_3, \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\right)$$

yazılabilir. Teorem 3.1 (b) den

$$\lambda_1 = \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2} = \frac{\cos 2\beta - \frac{1}{2}\cos\beta}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}\cos 2\beta - \frac{2}{3}\cos\beta,$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos\beta - \cos(k\beta) <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2} = \frac{\cos\beta - \frac{1}{2}\cos 2\beta}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}\cos\beta - \frac{2}{3}\cos 2\beta$$

ve

$$\lambda_3 = \pm\sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}}$$

$$= \mp\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\beta - \frac{4}{3}\cos^2 2\beta + \frac{4}{3}\cos\beta\cos 2\beta}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\vec{x}(\beta) = \frac{\cos(k\beta) - \cos\beta <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}\vec{p}$$
$$+ \frac{\cos\beta - \cos(k\beta) <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}\vec{q}$$
$$\mp\sqrt{1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}}\vec{r}$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\vec{x}(\beta) = \Bigg(\mp\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\beta - \frac{4}{3}\cos^2 2\beta + \frac{4}{3}\cos 2\beta\cos\beta},$$
$$\cos\beta - \cos 2\beta,\ \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\beta + \cos 2\beta)\Bigg)$$

elde edilir. Bu eğri için Maple programı ile aşağıda verilen hesaplama sonucunda $\tau \neq 0$ olduğu görülür. Bu ise eğrimizin

$$1 - \frac{\cos^2(k\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(k\beta)\cos\beta <\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2} \geq 0$$

koşulunu sağlayan β değerleri için düzlemsel olmayan bir eğri olduğunu gösterir. (Şekil 2 (a)-(b)).

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
```

```
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
>RETURN(kappa=(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))
/
(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
>RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/
(nrm(xp(Xt,Xtt))^2),symbolic));
> end:
>X:=[sqrt(1-4/3*cos(beta)*cos(beta)-
4/3*cos(2*beta)*cos(2*beta)+
4/3*cos(2*beta)*cos(beta)),cos(beta)-
cos(2*beta),sqrt(3)/3*(cos(beta)+cos(2*beta))]
;
```

$$X := \left[\frac{1}{3}\sqrt{9-12\cos(\beta)^2-12\cos(2\beta)^2+12\cos(2\beta)\cos(\beta)},\ \cos(\beta)-\cos(2\beta),\ \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\cos(\beta)+\cos(2\beta)\right)\right]$$

```
>curv(X);
```

$$\kappa = \frac{1}{8}\left(-64\cos(\beta)^9+432\cos(\beta)^8-1776\cos(\beta)^6+1728\cos(\beta)^5-648\cos(\beta)^4+96\cos(\beta)^3-1\right)^{1/2}\Big/\left(\cos(\beta)^{3/2}\left(\cos(\beta)^3-3\cos(\beta)+1\right)^{3/2}\right)$$

```
> tor(X);
```

$$\tau = \left(\left(8\cos(\beta)^6-72\cos(\beta)^5+60\cos(\beta)^4-20\cos(\beta)^3+6\cos(\beta)-1\right)\sqrt{-3-48\cos(\beta)^4+24\cos(\beta)^3+36\cos(\beta)^2-12\cos(\beta)}\,\sqrt{3}\right)\Big/\left(64\cos(\beta)^9-432\cos(\beta)^8+1776\cos(\beta)^6-1728\cos(\beta)^5+648\cos(\beta)^4-96\cos(\beta)^3+1\right)$$

dır. Örneğin, $\beta = 2\pi/3$ değeri için κ ve τ değerleri

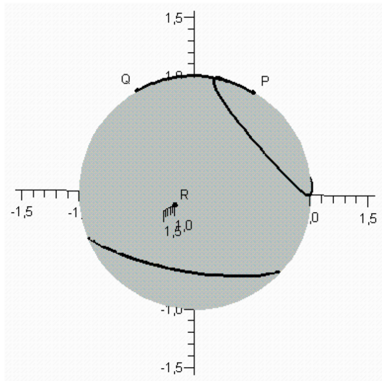
```
>evalf(subs(beta=2*Pi/3,curv(X)));
```

$\kappa = 1.11583128$

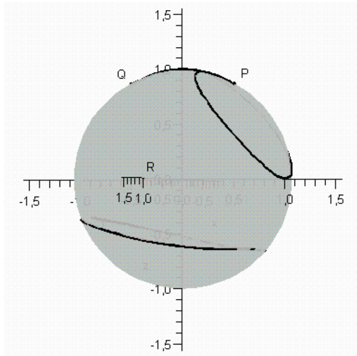
```
>evalf(subs(beta=2*Pi/3,tor(X)));
```

$\tau = 0.147051715$

dır.



Şekil 2(a)



Şekil 2(b)

Sonuç 3.2. P ve Q, S^2 birim küre üzerinde farklı iki nokta ve $n \neq 0$ olmak üzere m,n tamsayılar olsun. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri dik ise bu takdirde, $d(P,X):d(Q,X)=m:n$ oranını sağlayan küre üzerindeki $X(x_1,x_2,x_3)$ noktalarının geometrik yeri,

a) Eğer $m=n$ ise

$$\vec{x}(\beta)=\cos(\beta)\vec{p}+\cos\beta\,\vec{q}\mp\sqrt{1-2\cos^2\beta}\;\vec{r}$$

ile belirli bir büyük çember,

b) Eğer $m \neq n$ ise

$$\vec{x}(\beta)=\cos(k\beta)\vec{p}+\cos\beta\,\vec{q}\mp\sqrt{1-\cos^2(k\beta)-\cos^2\beta}\;\vec{r}$$

ile belirli düzlemsel olmayan bir eğridir.

İspat: a) Teorem 3.1 (a) den $\lambda_1=\dfrac{\cos\sigma}{1+<\vec{p},\vec{q}>}$, $\lambda_2=\dfrac{\cos\sigma}{1+\cos\delta}$ ve $\lambda_3=\mp\sqrt{1-\dfrac{2\cos^2\sigma}{1+<\vec{p},\vec{q}>}}$ olduğunu biliyoruz. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörleri dik olduklarından $<\vec{p},\vec{q}>=0$ dır. Böylece, $\lambda_1=\lambda_2=\cos\sigma=\cos\beta$ ve $\lambda_3=\mp\sqrt{1-2\cos^2\beta}$ dır. Dolayısıyla,

$$\vec{x}(\alpha)=\cos\beta\ \vec{p}+\cos\beta\ \vec{q}\mp\sqrt{1-2\cos^2\beta}\ \vec{r}$$

dır. Bu ise küre yüzeyi üzerinde bir büyük çember belirtir.

b) Teorem 3.1 (b) den

$$\lambda_1=\frac{\cos(k\beta)-\cos\beta<\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2},$$

$$\lambda_2=\frac{\cos\beta-\cos(k\beta)<\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}\ \text{ve}$$

$$\lambda_3=\pm\sqrt{1-\frac{\cos^2(k\beta)+\cos^2\beta-2\cos(k\beta)\cos\beta<\vec{p},\vec{q}>}{1-(<\vec{p},\vec{q}>)^2}}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, $<\vec{p},\vec{q}>=0$ yazılırsa

$$\lambda_1=\cos(k\beta),\ \lambda_2=\cos\beta,$$

$$\lambda_3=\pm\sqrt{1-\cos^2(k\beta)-\cos^2\beta}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\vec{x}(\beta)=\cos(k\beta)\vec{p}+\cos\beta\vec{q}$$
$$\mp\sqrt{1-\cos^2(k\beta)-\cos^2\beta}\ \vec{r}$$

bulunur.

Örnek 3.3 S^2 küre yüzeyi üzerinde iki nokta $P(1,0,0)$ ve $Q(0,1,0)$ olsun. Bu takdirde, $d(P,X):d(Q,X)=1:1$ olacak şekilde küre üzerindeki $X(x_1,x_2,x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım. P ve Q noktalarına karşılık gelen $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörleri için $\vec{r}=\frac{\vec{p}\times\vec{q}}{\|\vec{p}\times\vec{q}\|}=(0,0,1)$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}\vec{x}&=\lambda_1\vec{p}+\lambda_2\vec{q}+\lambda_3\vec{r}\\&=\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)\\&=(\lambda_1,0,0)+(0,\lambda_2,0)+(0,0,\lambda_3)\\&=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan, $X\in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\|=1$ dir. Dolayısıyla; $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1$ bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\lambda_3^2=1-\lambda_1^2-\lambda_2^2,\ \lambda_3=\mp\sqrt{1-\lambda_1^2-\lambda_2^2}$$

bulunur. $\lambda_1=\cos\sigma$ ve $\lambda_2=\cos\beta$ olup $\cos\sigma=\cos\beta$ olduğundan $\lambda_1=\lambda_2$ bulunur. Buradan da

$$\lambda_3=\mp\sqrt{1-2\lambda_1^2}=\mp\sqrt{1-2\cos^2\beta}$$

olarak elde edilir. O halde;

$$\vec{x}(\beta)=\left(\cos\beta,\ \cos\beta,\ \mp\sqrt{1-2\cos^2\beta}\right)$$

dır. Buradan, Maple programı ile aşağıda verilen hesaplama sonucunda $\tau=0$ olduğu görülür.
Bu ise eğrimizin düzlemsel bir eğri olduğunu gösterir. (Şekil 3).

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
>RETURN(kappa=(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))
/(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
>RETURN(tau=simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/
(nrm(xp(Xt,Xtt))^2),symbolic));
> end:
>X:=[cos(beta),cos(beta),(sqrt(1-
2*((cos(beta))*cos(beta))))];
```

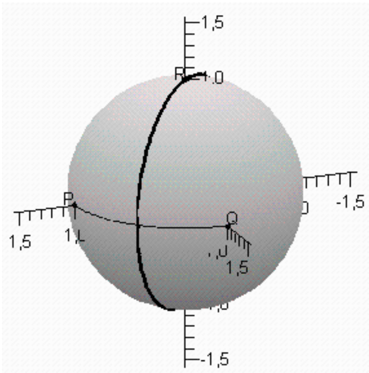
$$X:=\left[\cos(\beta),\cos(\beta),\sqrt{1-2\cos(\beta)^2}\right]$$

```
> curv(X);
```

$\kappa=1$,

```
> tor(X);
```

$\tau=0$.



Şekil 3

Örnek 3.4. S^2 küre yüzeyi üzerinde farklı iki nokta $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ ve $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ olsun. Bu takdirde $d(P,X):d(Q,X)=2:1$ olacak şekilde küre yüzeyi üzerindeki $X(x_1,x_2,x_3)$ noktalarının geometrik yerini bulalım. $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ konum vektörleri için $\vec{r}=\frac{\vec{p}\times\vec{q}}{\|\vec{p}\times\vec{q}\|}=(0,0,1)$ dır. Ayrıca, $\frac{m}{n}=2$ olduğundan $\sigma=2\beta$ dır. O halde, $\cos\sigma=\cos 2\beta$ dır. Şimdi

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{p}+\lambda_2\vec{q}+\lambda_3\vec{r}$$
$$=\lambda_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)+\lambda_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)+\lambda_3(0,0,1)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1+\lambda_2),\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1-\lambda_2),\lambda_3\right)$$

dır. Diğer taraftan, $X\in S^2$ olduğundan $\|\vec{x}\|=1$ dir. Dolayısıyla;

$$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)^2+\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)^2+\lambda_3{}^2=1$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\lambda_3=\mp\sqrt{1-\lambda_1^2-\lambda_2^2}$$

bulunur. $\lambda_1=\cos\sigma=\cos 2\beta$ ve $\lambda_2=\cos\beta$ olduğundan $\lambda_3=\mp\sqrt{1-\cos^2 2\beta-\cos^2\beta}$ olarak bulunur. O halde,

$$\vec{x}(\beta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2\beta+\cos\beta),\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2\beta-\cos\beta),\right.$$
$$\left.\mp\sqrt{1-\cos^2 2\beta-\cos^2\beta}\right)$$

dır. Buradan, Maple programıyla yapılan hesaplamayla $\tau\neq 0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, eğrimiz düzlemsel olmayan bir eğridir. (Şekil 4-(a),(b))

```
> dp:=proc(P,Q)
> P[1]*Q[1]+P[2]*Q[2]+P[3]*Q[3];
> end:
> nrm:=proc(P)
> sqrt(dp(P,P));
> end:
> xp:=proc(P,Q)
> local a,b,c;
> a:=P[2]*Q[3]-P[3]*Q[2];
> b:=P[3]*Q[1]-P[1]*Q[3];
> c:=P[1]*Q[2]-P[2]*Q[1];
> [a,b,c];
> end:
> curv:=proc(X)
> local Xt, Xtt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
>RETURN(kappa=(simplify((nrm(xp(Xt,Xtt)))
/
(nrm(Xt))^3,symbolic)));
> end:
> tor:=proc(X)
> local Xt, Xtt,Xttt;
> Xt:=diff(X,beta);
> Xtt:=diff(Xt,beta);
> Xttt:=diff(Xtt,beta);
>
RETURN(tau=(simplify((dp(xp(Xt,Xtt),Xttt))/
(nrm(xp(Xt,Xtt))^2),symbolic)));
> end:
>X:=[(1/sqrt(2))*(cos(2*beta)+cos(beta)),
(1/sqrt(2))*(cos(2*beta)-cos(beta)),-sqrt(1-
(cos(beta)*cos(beta))-
(cos(2*beta)*cos(2*beta)))];
```

$$X:=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\cos(2\beta)+\cos(\beta)),\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\cos(2\beta)-\cos(\beta)),-\sqrt{1-\cos(\beta)^2-\cos(2\beta)^2}\right]$$

```
> curv(X);
```

$$\kappa=\frac{3}{2}\sqrt{3}\left|\frac{\sqrt{\cos(\beta)^2-4}}{\left(\cos(\beta)^2-3\right)^{3/2}}\right|$$

```
> tor(X);
```

$$\tau=-\frac{\sqrt{-4\cos(\beta)^2+3}}{\cos(\beta)^2-4}$$

elde edilir. Örneğin, $\alpha = \pi/3$ değeri için κ ve τ değerleri

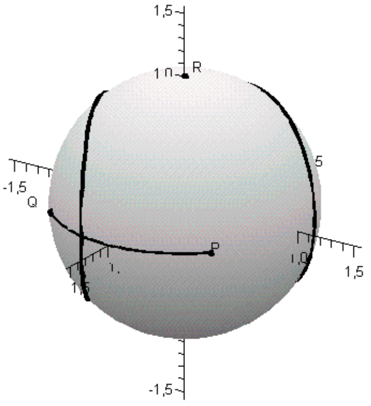
> evalf(subs(beta=Pi/3,curv(X)));

$\kappa = 1.1032361$

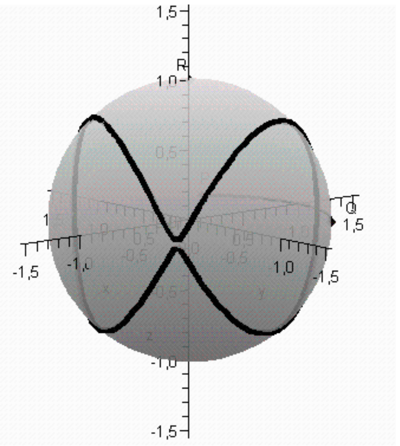
> evalf(subs(beta=Pi/3,tor(X)));

$\tau = 0.37712361$

dır.



Şekil 4 (a)



Şekil 4 (b)

Kaynaklar

[1] Brannan, D. A., Esplen, M. F., Gray, J. J., Geometry, Cambridge University Press (2000).

[2] Do Carmo, M. P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., London 1976.

[3] Oprea, J., Differential Geometry and Its Applications, Prentice Hall, Inc., London 1997.

Geliş Tarihi:28.05.2013

Kabul Tarihi:02.05.2014