GÜFBED/*GUSTIJ* (2018) CMES 2018 SEMPOZYUM EK SAYISI: 37-45
DOI: 10.17714/gumusfenbil.429431 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Yıldızıl Fonksiyonların $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ Alt Sınıfının Özellikleri

On Properties of the Subclass $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ of Starlike Functions

Hüseyin BABA*
Hakkâri Üniversitesi, Çölemerik Meslek Yüksekokulu, Matematik Bölümü, 30000, Hakkâri

• Geliş tarihi / *Received*: 01.06.2018 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 18.09.2018 • Kabul tarihi / *Accepted*: 03.10.2018

Öz
Bu makalede, açık birim diskte analitik olan $f(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}a_kz^k$ biçimindeki fonksiyonlar ve D^n diferansiyel operatörü kullanılarak negatif katsayılı yıldızıl fonksiyonların $P(j,\lambda,\alpha,n)$ alt sınıfına çalışıldı. $a_k\geq 0$, $z_0\in\mathbb{R}$ ve $f(z_0)=z_0$ olan $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ sınıfını göz önüne alındı. $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ sınıfına ait bazı özellikler elde edildi.

Anahtar kelimeler: Ünivalent fonksiyon, Sabit nokta, Yıldızıl, Konveks, Sălăgean operatörü

Abstract
In this paper, we study the subclass $P(j,\lambda,\alpha,n)$ of starlike functions and with negative coefficients by using the differential D^n operator and functions of the form $f(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}a_kz^k$ which are analytic in the open unit disk. We consider the class $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ for which $(z_0)=z_0$, z_0 real where $a_k\geq 0$. Some properties belonging to the class $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ are obtained.

Keywords: *Univalent function, Fixed point, Starlike, Convex, Sălăgean operator*

*Hüseyin BABA, huseyinbaba@hakkari.edu.tr, Tel: (0438) 211 83 56 -1434; 0(531) 7186412; orcid.org/0000-0001-9749-2299

1. Giriş

1.1. Tanım f, $\mathcal{U} = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ |z| < 1\}$ açık birim diskinde analitik olan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

formundaki f fonksiyonlar ailesi $\mathcal{A}$ ile tanımlıdır. $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun α. mertebeden yıldızıl olduğunu söyleyebilmemiz için gerek ve yeter şart

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \qquad (0 \le \alpha < 1;\ z \in \mathcal{U}) \quad (2)$$

olmasıdır. Bütün böyle fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ olarak adlandırılır. Ayrıca $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun α. mertebeden konveks olduğunu söyleyebilmemiz için gerek ve yeter şart

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (0 \le \alpha < 1;\ z \in \mathcal{U}) \quad (3)$$

olmasıdır. Bütün böyle fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ olarak adlandırılır. $\mathcal{U}$ açık birim diskinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı sırasıyla $S^*(0) = S$ ve $C(0) = C$ ile gösterilir.

Silverman (1976), $a_n \ge 0$ ve $-1 < z_0 < 1$ olmak üzere f fonksiyonunun $f(z_0) = z_0$ olan yıldızıl fonksiyonların alt sınıflarını $S_0^*(\alpha, z_0)$ şeklinde ve $f'(z_0) = 1$ olan yıldızıl fonksiyonların alt sınıflarını da $S_1^*(\alpha, z_0)$ şeklinde tanımladı (Silverman, 1976).

1.2. Tanım
$D^0 f(z) = f(z)$
$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} k a_k z^k$
.
.
.
$D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} k^n a_k z^k \qquad (n \in \mathbb{N})$

şeklindeki D operatörüne Sălăgean Operatörü denir (Sălăgean, 1983).

1.3. Tanım $\mathcal{U} = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ |z| < 1\}$ açık birim diskinde analitik olan

$$f(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (j \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}) \quad (4)$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}(j)$ olarak tanımlanır (Sălăgean, 1983).

1.4. Tanım $\mathcal{A}(j)$ sınıfında olan f fonksiyonunun pozitif katsayılı $Q(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$Re\left\{\frac{(1-\lambda)z\left(D^n f(z)\right)' + \lambda z\left(D^{n+1} f(z)\right)'}{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}\right\} > \alpha \quad (5)$$

$(j \in \mathbb{N}; 0 \le \alpha < 1; 0 \le \lambda < 1; n \in \mathbb{N}_0;\ \forall z \in \mathcal{U})$ olmasıdır. Burada, D^n Sălăgean operatörüdür (Aouf ve Srivastava, 1996).

1.5. Tanım $\mathcal{U}$ açık birim diskinde analitik olan

$$f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (a_k \ge 0; n \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $T(j)$ olarak tanımlanır (Aouf ve Srivastava, 1996).

1.6. Tanım $P(j, \lambda, \alpha, n) = Q(j, \lambda, \alpha, n) \cap T(j)$ ile negatif katsayılı olarak $P(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfı olarak tanımlanır (Aouf ve Srivastava, 1996). $P(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfındaki bir f fonksiyonu

$D^0 f(z) = f(z)$
$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} k a_k z^k$

ve $n = 1,2,3,..$ için

$D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} k^n a_k z^k$
$(n \in \mathbb{N})$

yazabiliriz.

$P(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliklerini, ayrık teoremlerini, kapalılık teoremlerini ve bazı özelliklerini Aouf ve Srivastava (1996) elde etmişlerdir. Onlar birde $P(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfının konvekslik, yıldızıllık, yakın konvekslik yarıçapını belirlemişlerdir.

Teoremimizin ispatı için aşağıdaki üç lemma gereklidir.

1.1. Lemma $f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklinde tanımlı fonksiyonun $P(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} k^n (k - \alpha)\{1 + (k-1)\lambda\} a_k \le 1 - \alpha \quad (7)$$

olmasıdır. Burada, $a_k \ge 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \alpha < 1$, $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \le \lambda < 1$ dır (Aouf ve Srivastava, 1996).

1.2. Lemma Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \ge 0$ olmak üzere $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S_0^*(\alpha, z_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{n-\alpha}{1-\alpha} - z_0^{n-1}\right] \le 1 \quad (8)$$

olmasıdır. Burada, $z_0 \in \mathbb{R}$ sabit nokta, $a_1 \neq 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ dır (Silverman, 1976).

1.1. Sonuç (Silverman, 1975) makalesindeki, 3. Teoreminin ispatında küçük bir değişik ile Teorem 3.1.3'ün şartları altında $f(z)$ fonksiyonunun ünivalent olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n - {z_0}^n) \leq 1$ durumunu ortaya koymuştur ($\alpha = 0$ olduğuna dikkat edelim). Dolayısıyla, Silverman'nın yukarıdaki gibi tanımladığı fonksiyonların ünivalent olması için gerek ve yeter şart yıldızıl olmasıdır sonucu çıkarılır (Silverman, 1976).

1.2. Sonuç (Ekstremal fonksiyon) Eğer $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $S_0^*(\alpha, z_0)$ sınıfında olursa, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq \frac{1-\alpha}{(n-\alpha)-(1-\alpha)z_0^{n-1}}$ olduğundan ekstremal fonksiyonu

$$f(z) = \frac{(n-\alpha)z-(1-\alpha)z^n}{(n-\alpha)-(1-\alpha)z_0^{n-1}} \tag{9}$$

dir (Silverman, 1976).

1.3. Lemma $f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklinde tanımlı fonksiyonun $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \left[k^n \left(\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right)\{1 + (k-1)\lambda\} - z_0^{k-1}\right] a_k \leq 1 \tag{10}$$

olmasıdır. Burada $a_k \geq 0, j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \alpha < 1, z \in \mathcal{U},$ $0 \leq \lambda < 1$ ve $z_0 \in \mathbb{R}$ sabit noktadır (Kızıltunc ve Baba, 2012).

Herhangi bir sabit noktaya sahip $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ alt sınıfını tanımlandı ve bu sınıfa ait katsayı eşitsizlikleri belirlendi (Kızıltunç ve Baba, 2012). Baba (2018), çalışmamda $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfının konveks olduğunu ve bu sınıfa ait fonksiyonların Modified Hadamard çarpımı elde edildi. Bu makaledeki sonuçlar, (Silverman, 1976) makalesiyle sonuç kesinleştirildi.

2. $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ Sınıfının Bazı Özellikleri

$P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfı için örnekler ve bazı sonuçlar verildi. (Aouf ve Srivastava, 1996) tarafından kullanılan yöntemlerle $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfının bazı özellikleri elde edildi.

2.1. Örnek Öncelikle $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere, Lemma 1.1 yardımıyla $P(j, \lambda, \alpha, n)$ sınıfına ait $f(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $j = 1,$ $\alpha = 0$ ve $\lambda = 1$ değerleri için, (7) eşitsizliğinden $\sum_{k=2}^{\infty} k^{n+2} a_k \leq 1$ elde edilir ve bu son eşitsizlikte $a_k = \frac{1}{k^{n+6}}$ alınırsa,

$\sum_{k=2}^{\infty} k^{n+2} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} k^{n+2} \frac{1}{k^{n+6}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{31\pi^4}{1440} - 1 \cong 0{,}082323 < 1$

olur ve dolayısıyla

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n+6}} z^k \tag{11}$$

fonksiyonu elde edilir. Ayrıca, bu $f(z)$ fonksiyonu reel eksen boyunca $z \to 1$ iken,

$$Re\left\{\frac{(1-\lambda)z\left(D^n f(z)\right)' + \lambda z\left(D^{n+1} f(z)\right)'}{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}\right\} > \alpha \Rightarrow Re\left\{\frac{z\left(D^n f(z)\right)'}{D^{n+1} f(z)}\right\} > 0 \Rightarrow \frac{1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^4}}{1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^3}} > 0 \tag{12}$$

olduğundan dolayı $P(j, \lambda, \alpha, n, z)$ sınıfındadır. Şimdi de, (11) deki $f(z)$ fonksiyonu için (10) eşitsizliği kullanılarak,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k^{n+2} - {z_0}^{k-1}\right]\frac{1}{k^{n+6}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n+6}} z_0^{k-1} \geq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^4} - 1 = \frac{31\pi^4}{1440} - 2$$

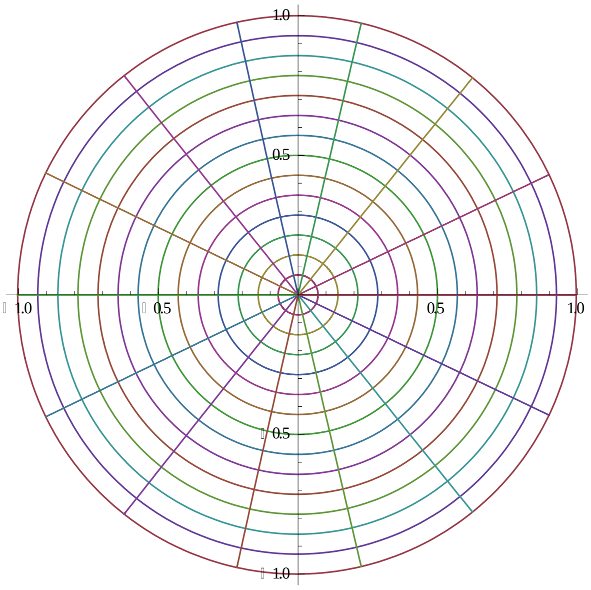
eşitsizliği elde edilir. Bu da, $f(z)$ fonksiyonun $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfında olması demektir. Bu son eşitsizliğin sol tarafı sıfıra eşit olacağından fonksiyonun sabit noktası bulunabilir. Yine, son eşitsizliğin sağ tarafı negatif olduğundan, $z_0 = 0$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Birim diskin $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü Şekil 1'de gösterildiği gibidir.

2.1. Not Genel olarak, her $z_0 \in \mathbb{R}$ sabit noktası için uygun bir a_k katsayısı bulunarak, $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfına ait $f(z)$ fonksiyonunun sabit noktası bulunabilir. Bunun için Lemma 1.3'ün şartlarını ve bu teoremin bir sonucu olan $\sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z_0^{k-1} = 0$ eşitliğini sağlaması yeterli olacaktır.

2.2. Örnek $z_0 = \frac{1}{2}$ sabit nokta olmak üzere, $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfına ait herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu bulalım. Lemma 1.1 yardımıyla $n = 0,\ j = 1,\ \alpha = 0$ ve $\lambda = 1$ değerleri için, (7) eşitsizliğinden $\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \leq 1$ elde edilir. Bunun için uygun bir a_k katsayısı,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k a_k = \sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{2{,}3413}{k^2(k-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2{,}3413}{k(k-1)} - k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \cong 2{,}3 - 3 \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $a_k = \frac{2{,}3413}{k^2(k-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ olarak bulunabilir.



Şekil 1. Birim diskin $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n+6}} z^k$ fonksiyonu altındaki görüntüsü ($z_0 = 0$ sabit noktası için).

Şimdi de,

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{2{,}3413}{k^2(k-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] z^k \tag{13}$$

fonksiyonu için (1.10) eşitsizliği kullanılarak,

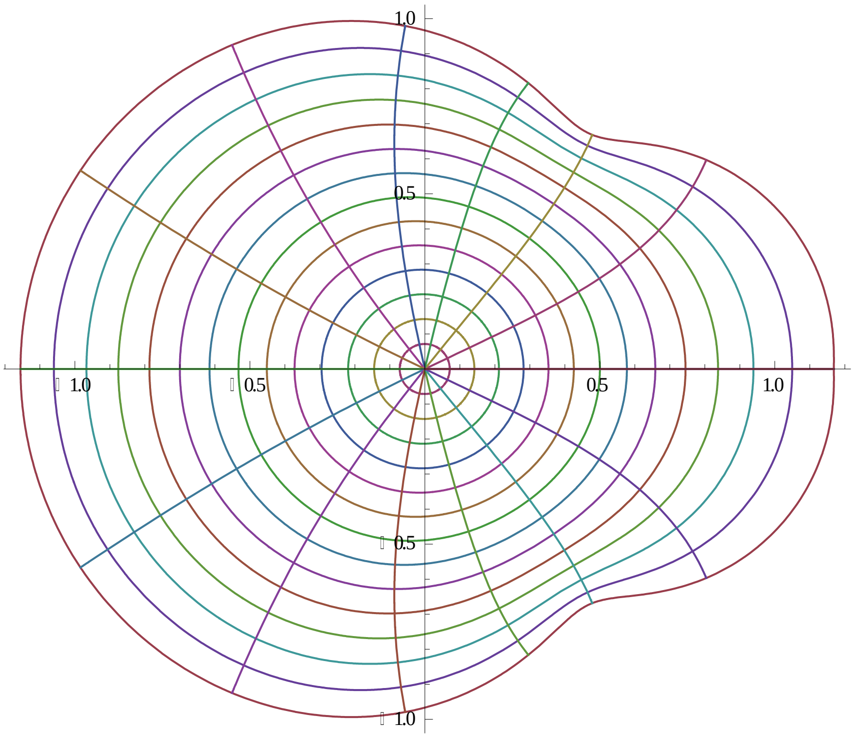
$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k - z_0{}^{k-1}\right] a_k \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} a_k z_0^{k-1} \geq \sum_{k=2}^{\infty} k a_k = 2{,}3413 - 3 = -0{,}6587$$

elde edilir. Son eşitsizliğin sol tarafı sıfıra eşit olacağından fonksiyonun sabit noktasını bulunabilir. Burada Lemma 1.3'ün şartlarının sağlandığı görülebilir. Yine, $z_0 = 0$ noktası bu elde edilen fonksiyonun bir sabit noktasıdır.

Aynı şekilde, $z_0 = \frac{1}{2}$ noktasının bir sabit nokta olması için (13)'deki fonksiyonun $\sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z_0^{k-1} = 0$ eşitliğini sağlaması gerekir. O halde,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{2{,}3413}{k^2(k-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2{,}3413\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{k^2(k-1)} = 2{,}3413.0{,}14237 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

olacağından $z_0 = \frac{1}{2}$ noktası bu $f(z)$ fonksiyonunun bir sabit noktadır. Burada, birim diskin $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{2,3413}{k^2(k-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]z^k$ fonksiyonu altındaki görüntüsü Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Birim diskin $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{2,3413}{k^2(k-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]z^k$ fonksiyonu altındaki görüntüsü ($z_0 = \frac{1}{2}$ için).

2.1. Sonuç Lemma 1.1 için ekstremal fonksiyonu,

$$f(z) = z - \frac{(1-\alpha)(j+1)^m}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha){z_0}^{k-1}}z^{j+1} \tag{14}$$

şeklindedir. Burada $a_k \geq 0, j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \alpha < 1, z \in \mathcal{U},\ 0 \leq \lambda < 1$ ve $z_0 \in \mathbb{R}$ sabit noktadır.

2.2. Sonuç $f(z) \in P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ ise

$$a_k \leq \frac{(1-\alpha)(j+1)^m}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha){z_0}^{k-1}} \tag{15}$$

dır.

2.3. Sonuç Eğer, $j = 1, \lambda = 0, n = 0$ alınırsa $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0) = P(1,\alpha,z_0)$ olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right) - z_0^{k-1}\right]a_k \leq 1 \tag{16}$$

olur ki, $P(1,\alpha,z_0) = S_0^*(\alpha,z_0)$ elde edilir (Kiziltunc ve Baba, 2012).

2.4. Sonuç $f(z) \in P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ sınıfının ünivalent olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^{n+1}\{1+(k-1)\lambda\}-z_0^{k-1}\right]a_k\leq 1 \tag{17}$$

olmasıdır. $j=1,\lambda=1,n=0$ alınırsa Sonuç 1.1 elde edilir.

2.5. Sonuç Eğer, $j=1,\lambda=1,n=0$ alınırsa $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)=P(1,1,\alpha,z_0)$ olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha}-z_0^{k-1}\right]a_k\leq 1 \tag{18}$$

olur ki, $P(1,1,\alpha,z_0)=K_0^*(\alpha,z_0)$'dır (Kiziltunc ve Baba, 2012).

2.1. Teorem $0\leq \alpha_1\leq\alpha_2$, $0\leq\lambda\leq 1$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve j $\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$P(j,\lambda,\alpha_1,n,z_0)\supseteq P(j,\lambda,\alpha_2,n,z_0) \tag{19}$$

dir.

İspat. $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2<1$ ve $\delta>0$ olmak üzere, $P(j,\lambda,\alpha_1,n,z_0)\supseteq P(j,\lambda,\alpha_2,n,z_0)$ olduğunu gösterelim. $f(z)\in P(j,\lambda,\alpha_2,n,z_0)$ ve α_1=$\alpha_2-\delta$ olsun. Lemma 1.3 kullanılarak

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n\left(\frac{k-\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)\{1+(k-1)\lambda\}-z_0^{k-1}\right]a_k\leq 1$$

elde edilir ve $\sum_{k=j+1}^{\infty}a_k z_0^{k-1}=0$ olduğundan,

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n(k-\alpha_2)\{1+(k-1)\lambda\}-z_0^{k-1}\right]a_k\leq 1-\alpha_2$$

dır. Lemma 1.1'den,

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[k^n\{1+(k-1)\lambda\}]a_k\leq 1$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n(k-\alpha_1)\{1+(k-1)\lambda\}-z_0^{k-1}\right]a_k\\ &=\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n(k-\alpha_2+\delta)\{1+(k-1)\lambda\}-z_0^{k-1}\right]a_k\\ &\leq\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n(k-\alpha_2)\{1+(k-1)\lambda\}-z_0^{k-1}\right]a_k+\delta\sum_{k=j+1}^{\infty}k^n\{1+(k-1)\lambda\}a_k\\ &\leq 1-\alpha_2+\delta=1-\alpha_1<1\end{aligned}$$

olduğundan, $f(z)\in P(j,\lambda,\alpha_1,n,z_0)$ olur.

2.2. Teorem $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ olmak üzere

$$P(j,\lambda_1,\alpha,n,z_0) \supseteq P(j,\lambda_2,\alpha,n,z_0) \tag{20}$$

dir.

İspat. $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ ve $\delta > 0$ olmak üzere, $P(j,\lambda_1,\alpha,n,z_0) \supseteq P(j,\lambda_2,\alpha,n,z_0)$ olduğunu gösterelim. $f(z) \in P(j,\lambda_1,\alpha,n,z_0)$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 - \delta$ olsun. Lemma 1.3 kullanılarak

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n\left(\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right)\{1+(k-1)\lambda_1\} - z_0^{k-1}\right]a_k \leq \sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n\left(\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right)\{1+(k-1)\lambda_2\} - z_0^{k-1}\right]a_k < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f(z) \in P(j,\lambda_2,\alpha,n,z_0)$ olur.

2.3. Teorem: $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \lambda < 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$P(j,\lambda,\alpha,n+1,z_0) \subseteq P(j,\lambda,\alpha,n,z_0) \tag{21}$$

dür.

İspat. $f(z) \in P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ olsun. Lemma 1.3 kullanılarak

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^n\left(\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right)\{1+(k-1)\lambda\} - z_0^{k-1}\right]a_k \leq \sum_{k=j+1}^{\infty}\left[k^{n+1}\left(\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right)\{1+(k-1)\lambda\} - z_0^{k-1}\right]a_k < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f(z) \in P(j,\lambda,\alpha,n+1,z_0)$ olur.

2.4. Teorem (6) ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ sınıfında olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için,

$$|D^m f(z)| \geq r - \frac{(1-\alpha)(j+1)^m}{(j+1)^n\big(j+1-\alpha)(1+j\lambda)\big) - (1-\alpha){z_0}^{k-1}} r^{j+1} \tag{22}$$

ve

$$|D^m f(z)| \leq r + \frac{(1-\alpha)}{(j+1)^n\big(j+1-\alpha)(1+j\lambda)\big) - (1-\alpha){z_0}^{k-1}} r^{j+1} \tag{23}$$

şeklindedir. Burada, $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq m \leq n$ dir.

(22) ve (23) eşitsizliklerindeki eşitlik durumları,

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda)} z^{j+1} \qquad (z = \pm r) \tag{24}$$

şeklindeki ekstremal fonksiyonu ile sağlanır.

İspat. $|z| = r < 1$ olmak üzere $f(z) \in P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$D^m f(z) \in P(j,\lambda,\alpha,n-m,z_0)$$

olmasıdır. Ayrıca,

$$D^m f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} k^m a_k z^k \tag{25}$$

eşitliği ve Lemma 1.3 kullanılarak

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \left[k^n(k-\alpha)\{1+(k-1)\lambda\} - (1-\alpha)z_0^{k-1}\right]a_k \leq 1-\alpha$$

olur. Bu son eşitsizlik yardımıyla,

$$\begin{aligned}
1-\alpha &\geq \sum_{k=j+1}^{\infty} \left[k^n(k-\alpha)\{1+(k-1)\lambda\} - (1-\alpha)z_0^{k-1}\right]a_k \\
&= (j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda)a_{j+1} + \cdots - (1-\alpha)\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{k^m}{k^m} a_k z_0^{k-1} \\
&\geq (j+1)^{m+(n-m)}(j+1-\alpha)(1+j\lambda)a_{j+1} + \cdots - \frac{(1-\alpha)z_0^j}{(j+1)^m}\sum_{k=j+1}^{\infty} k^m a_k \\
&\geq (j+1)^{n-m}(j+1-\alpha)(1+j\lambda)(j+1)^m a_{j+1} + \cdots - \frac{(1-\alpha)z_0^j}{(j+1)^m}\sum_{k=j+1}^{\infty} k^m a_k \\
&\geq (j+1)^{n-m}(j+1-\alpha)(1+j\lambda)\sum_{k=j+1}^{\infty} k^m a_k - \frac{(1-\alpha)z_0^j}{(j+1)^m}\sum_{k=j+1}^{\infty} k^m a_k
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} k^m a_k \leq \frac{(1-\alpha)(j+1)^m}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^j} \tag{26}$$

bulunur. (26) ifadesi, (25)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
r - \frac{(1-\alpha)(j+1)^m}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^{k-1}} r^{j+1} &\leq |D^m f(z)| \\
&\leq r + \frac{(1-\alpha)(j+1)^m}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^{k-1}} r^{j+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4 de $m = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.6. Sonuç (6) ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu $P(j, \lambda, \alpha, n, z_0)$ sınıfında olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için,

$$|f(z)| \geq r - \frac{(1-\alpha)}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^{k-1}} r^{j+1} \tag{27}$$

ve

$$|f(z)| \geq 1 + \frac{(1-\alpha)}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^{k-1}} r^j \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{28}$$

olur.

(27) ve (28) eşitsizliklerindeki eşitlik durumları (24) da tanımlı ekstremal fonksiyonu için sağlanır. Teorem 4.4.13'de $m = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.7. Sonuç (6) ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$ sınıfında olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için,

$$|f'(z)| \geq 1 - \frac{(1-\alpha)(j+1)}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^{k-1}} r^j \tag{29}$$

ve

$$|f'(z)| \geq 1 + \frac{(1-\alpha)(j+1)}{(j+1)^n(j+1-\alpha)(1+j\lambda) - (1-\alpha)z_0^{k-1}} r^j \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{30}$$

olur. (29) ve (30) eşitsizliklerindeki eşitlik durumları (24)'da tanımlı ekstremal fonksiyonu için sağlanır.

Kaynaklar

Aouf, M.K. ve Srivastava, H.M., 1996. Some families of starlike functions with negative coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 203, 762-790.

Baba, H., 2018. The Modified Hadamard Products of Functions Belonging to the Class $P(j,\lambda,\alpha,n,z_0)$. International Journal of Scientific and Technological Research, 4(3), 19-26.

Kiziltunc, H. ve Baba, H., 2012. Inequalities for Fixed Points of the Subclass P(j,λ,α,n) of Starlike Functions with Negative Coefficients. Advances in Fixed Point Theory, 2, 197-202.

Sălăgean, G.Şt., 1983. Subclasses of univalent functions: "Complex Analysis: Fifth Romanian-Finnish Seminar." Part I, Lecture Notes in Mathematics, 1013, Springer-Verlag, Berlin/Newyork, pp. 362-372.

Silverman, H., 1975. Univalent functions with negative coefficients. Proceedings of the American Mathematical Society, 51, 109-116.

Silverman, H., 1976. Extreme points of univalent functions with two fixed points. Transactions of the American Mathematical Society, 219, 387-395.