AKÜ FEMÜBİD **18** (2018) **011304** (861-867) AKU J. Sci. Eng.**18** (2018) **011304** (861-867)
DOİ: 10.5578/fmbd.67742
Araştırma Makalesi / Research Article

Sabit Oranlı İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Serkan Öztürk[1], Melek Erdoğdu[2*]

[1] *Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik AnabilimDalı, Konya.*
[2] *Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Konya.*
**Sorumlu yazar, e-posta:merdogdu@konya.edu.tr*

Geliş Tarihi:13.07.2018 ; Kabul Tarihi:28.11.2018

Anahtar kelimeler
Öklid Uzayı;
İnvolüt-Evolüt Eğrileri;
N-sabit Eğrisi;
T-sabit Eğrisi;
Sabit Oranlı Eğrisi.

Özet

Bu çalışmada; Öklid uzayında sabit oran eğrileri ile ilgili daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Öklid uzayında eğrilere ilişkin temel bilgiler, birim hızlı eğriler için Frenet formülleri ve İnvolüt – Evolüt eğri çiftlerinin özellikleri ifade edilmiştir. Öklid uzayındaki sabit oranlı eğriler, T – sabit eğriler ve N – sabit eğriler tanıtılmıştır. Son olarak, sabit oranlı İnvolüt – Evolüt eğri çiftlerine dair elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir.

Constant Ratio Involute-Evolute Curve Couples

Keywords
Euclidean Space;
Involute – Evolute Curves;
N – constant Curve;
T – constant Curves;
Constant Ratio Curve.

Abstract

In this study; the previous studies about constant ratio curves in Euclidean space have been mentioned. The fundamental informations about curves in Euclidean space, Frenet formulas for unit speed curves and properties of Involute – Evolute curve couples are stated. Constant ratio curves, T – constant and N – constant curves are introduced. Finally; new obtained results on constant ratio Involute – Evolute curve couples are given.

1. Giriş

Bu çalışmanın amacı, Öklid uzayında sabit oranlı eğri İnvolüt – Evolütçiftlerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda; burulmuş (twisted) eğriler, W eğrileri, T- sabit ve N- sabit eğrileri ele alınmıştır. Burada $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisine, eğer eğrilik ve burulma fonksiyonları sıfırdan farklı ise burulmuş eğri; sabit ise W eğrisi adı verilir. Eğer α'nın teğet bileşenin uzunluğu (normal bileşenin uzunluğu) sabit ise α eğrisine T-sabit (N-sabit) eğrisi denir. Ayrıca bu sabit değer sıfır olursa eğri, birinci türden T-sabit (birinci türden N-sabit), diğer durumlarda ikinci türden olarak adlandırılır (Gürpınar vd. 2014).

Gürpınar vd.(2014) çalışmasında, Öklid uzayında sabit oranlı eğriler ile bunların bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir. Ayrıca Öklid uzayının alt manifoldlarında sabit oranlı eğrilerin tanımı verilmiş (Chen 2001) ve Riemann yüzeyleri ele alınmıştır (Chen 2003-1). Buna ek olarak (Chen 2003-2) çalışmasında Öklid uzayında rektifiyan eğriler ile burulmuş eğriler arasındaki ilişki ele alınmıştır. Bu çalışmanın devamı olarak rektifiyan eğrilerin bazı geometrik özelliklerine yer verilmiştir (Chen ve Dillen 2005). Ayrıca (Bozkurt vd. 2013) çalışmasında üç boyutlu kompakt Lie gruplarında rektifiyan, normal ve oskülatör eğriler çalışılmıştır. Diğer yandan $\mathbb{R}^m$'de ardışık eğrilikleri oranı sabit olan eğriler ele alınmıştır (Öztürk vd. 2008).

Sabit oranlı eğrileri incelemek için Frenet çatısından farklı çatılar da kullanılmıştır. Örneğin; Öklid uzayında sabit oranlı eğriler Bishop ve Parallel transport çatıları kullanılarak da incelenmiştir (Büyükkütük ve Öztürk 2015,Büyükkütük ve Öztürk

2015-2). Son olarak, Öztürk vd. (2017) çalışmasında sabit oranlı kuaterniyonik eğrilere dair önemli sonuçlar ortaya koymuştur.

Bu çalışmada, $\mathbb{R}^3$ uzayında sabit oranlı İnvolüt – Evolüt eğri çiftleri çiftleri ele alınmıştır. Sabit oranlı eğriler tanıtılıp, bunların bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir. Bununla birlikte burulmuş (twisted) eğrisi, W eğrisi, T- sabit ve N- sabit eğrisi üzerine çalışılmıştır. Ayrıca bir W eğrisini, eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarına bağlı diferansiyellenebilir fonksiyonlar cinsinden nasıl ifade edildiği verilmiş. Bu ifade edilişin sonucu olarak sabit oranlı Involüt – Evolüt eğri çiftleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. Temel Bilgiler

Tanım 2.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere$\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesine $\mathbb{R}^3$'de diferansiyellenebilir bir eğri (veya parametrik bir eğri) denir. α eğrisinin $\forall s \in I$ noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir ve bu durumda $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi adı verilir (Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

Teorem 2.1. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ ise

$$\begin{bmatrix} \dot{T}(s) \\ \dot{N}(s) \\ \dot{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} (1)$$

dir. Burada $\frac{d}{ds}$ " $\cdot$ " ile ifade edilmiştir (Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

Tanım 2.2. Birim hızlı bir $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile bir $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\tilde{\alpha}(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle \tilde{T}(s), T(s) \rangle = 0$$
(2)

ise $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü denir (Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

Teorem 2.2. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü ise λ sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s) \qquad (3)$$

dir(Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

Teorem 2.3. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{B}$ olduğuna göre

$$\tilde{T} = N, \qquad (4)$$

$$\tilde{N} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B, (5)$$

$$\tilde{B} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B (6)$$

dir(Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

Teorem 2.4. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulması $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\tau}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır:

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)(s)}}{|(-s+\lambda)|\kappa(s)}, \qquad (7)$$

$$\tilde{\tau}(s) = \frac{(\kappa\tau\prime - \kappa\prime\tau)}{(-s+\lambda)\kappa(\kappa^2+\tau^2)(s)} (8)$$

(Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

Tanım 2.3. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ noktasındaki teğet doğrusu $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \tilde{T}(s), T(s) \rangle = 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eğrisine α eğrisinin bir evolütü denir (Do Cormo 1976, Sabuncuoğlu 2014, Yüce 2017).

3. Sabit Oranlı Eğriler

Tanım 3.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Eğer her $s \in I$ için $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sıfırdan farklı ise α eğrisine burulmuş (gergin) eğri adı verilir (Gürpınar vd 2014).

Her regüler α eğrisi için, $\alpha(s)$ pozisyon vektörü,

$$\alpha(s) = \alpha^T + \alpha^N (9)$$

olacak şekilde teğet ve normal bileşenlerine ayrılabilir.

Tanım 3.2. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ve$\kappa(s) > 0$verilsin. Eğer $\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha^N\|}$ oranı sabit ise α eğrisine sabit oranlı eğri denir. Buna ek olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir α eğrisinin sabit oranlı olması için gerek ve yeter şart $\alpha^T = 0$ ya da $\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha\|}$ oranının sabit olmasıdır (Gürpınar vd 2014).

Tanım 3.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, eğer eğrinin teğet bileşeninin uzunluğu ($\|\alpha^T\|$) sabit ise α eğrisine T – sabit eğri denir. α, bir T – sabit eğri ise $\|\alpha^T\| = 0$ ya da $\|\alpha^T\| = \lambda$ dır. Eğer $\|\alpha^T\| = 0$ ise birinci türden T – sabit eğrisi denir, diğer durumlarda ikinci türdendir (Gürpınar vd 2014).

Tanım 3.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, eğer eğrinin normal bileşeninin uzunluğu ($\|\alpha^N\|$) sabit ise α eğrisine N – sabit eğri denir. α, bir N – sabit eğri ise $\|\alpha^N\| = 0$ ya da $\|\alpha^N\| = \mu$ dür. Eğer $\|\alpha^N\| = 0$ ise birinci türden N – sabit eğrisi denir, diğer durumlarda ikinci türdendir (Gürpınar vd 2014).

Chen, 2001'deki çalışmasında, m_0, m_1, m_2 birer diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere her α burulmuş (gergin) eğrisinin

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \tag{10}$$

şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştir.

Tanım 3.5. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için κ ve τ birer sabit fonksiyon ise α eğrisine W- eğrisi adı verilir (Gürpınar vd 2014).

Bu kısımda birim hızlı burulmuş eğrilerin eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize edilmiş hali verilecektir. Bunun için her $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisinin (10) ile verilen eşitlikle ifade edildiğini kullanacağız. (10) denkleminde her iki tarafının yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak

$$\alpha'(s) = m_0'(s)T(s) + m_0(s)T' + m_1'(s)N(s) + m_1(s)N'(s) + m_2'(s)B(s) + m_2(s)B'(s) \tag{11}$$

eşitliğini elde ederiz. α birim hızlı bir eğri olduğundan $\alpha'(s) = T(s)$ dir. O halde

$$m_0'(s) - \kappa(s)m_1(s) = 1, \tag{12}$$

$$m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) = 0, \tag{13}$$

$$m_2'(s) + \tau(s)m_1(s) = 0 \tag{14}$$

olduğu görülür.

3. Bulgular

Önerme 3.1.$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisi verilsin. α bir W- eğrisi ise pozisyon vektörü

$$m_0(s) = c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s, \tag{15}$$

$$m_1(s) = c_1 a\sin(as) + c_2 a\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{16}$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s \tag{17}$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir. Burada c_i $(0 \le i \le 2)$ reel sabitler ile $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir.

İspat: α bir burulmuş W- eğrisi ve $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ olsun. O halde (12-14) ile verilen diferansiyel denklemin katsayıları sabittir ve

$$\begin{bmatrix} m_0'(s) \\ m_1'(s) \\ m_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0(s) \\ m_1(s) \\ m_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

şeklinde yazılabilir. Homojen olmayan bu diferansiyel denklemin katsayılar matrisine ait özdeğer ve özvektörleri sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$\lambda_2 = ai \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -\kappa \\ -ai \\ \tau \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\lambda_3 = -ai \Rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} -\kappa \\ ai \\ \tau \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Burada $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir. Buna göre diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0\begin{pmatrix}\tau\\0\\\kappa\end{pmatrix} + d_1\begin{pmatrix}-\kappa\cos(as)\\a\sin(as)\\\tau\cos(as)\end{pmatrix}$$

$$+d_2\begin{pmatrix}-\kappa\sin(as)\\-a\cos(as)\\\tau\sin(as)\end{pmatrix} + d_3\begin{pmatrix}-\kappa\cos(as)\\a\sin(as)\\\tau\cos(as)\end{pmatrix}$$

$$+d_4\begin{pmatrix}\kappa\sin(as)\\a\cos(as)\\-\tau\sin(as)\end{pmatrix} \qquad (22)$$

olarak elde edilir. Burada c_0, d_1, d_2, d_3 ve d_4 birer sabit ve $d_1 + d_3 = c_1, d_4 - d_2 = c_2$ olmak üzere homojen çözümü düzenlersek

$$X_h(s) = c_0\begin{pmatrix}\tau\\0\\\kappa\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}-\kappa\cos(as)\\a\sin(as)\\\tau\cos(as)\end{pmatrix}$$

$$+c_2\begin{pmatrix}\kappa\sin(as)\\a\cos(as)\\-\tau\sin(as)\end{pmatrix} \qquad (23)$$

eşitliği elde edilir. Özel çözümü için temel matrisi

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix}\tau & -\kappa\cos(as) & \kappa\sin(as)\\0 & a\sin(as) & a\cos(as)\\\kappa & \tau\cos(as) & -\tau\sin(as)\end{pmatrix}(24)$$

şeklinde yazılabilir. (12-14) eşitlikleri ile verilen diferansiyel denkleminin özel çözümünü bulmak için $X_p(s) = \varphi(s)u(s)$ eşitliğinden yararlanırsak, burada $u(s)$ vektörü

$$\varphi(s)u'(s) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}(25)$$

eşitliğiyle bulunur.

O halde elde edilen 3×3 lineer denklem sistemini Kramer metodu ile çözersek ve bulunan ifadelerin sırasıyla integrali yardımıyla

$u_1(s) = \frac{\tau}{a^2}s,$

(26)

$u_2(s) = -\frac{\kappa\sin(as)}{a^3},$

(27)

$u_3(s) = -\frac{\kappa\cos(as)}{a^3}$ (28)

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$X_p(s) = \begin{pmatrix}\frac{\tau^2}{a^2}s\\\frac{-\kappa}{a^2}\\\frac{\kappa\tau}{a^2}s\end{pmatrix} \qquad (29)$$

ifadesi (12-14)'deki diferansiyel denklem sisteminin özel çözümüdür. Sonuç olarak, diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü $X_g(s) = X_h(s) + X_p(s)$eşitliğinden faydalanarak

$$m_0(s) = c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \tfrac{\tau^2}{a^2}s,$$

$$m_1(s) = c_1 a\sin(as) + c_2 a\cos(as) - \tfrac{\kappa}{a^2},$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \tfrac{\kappa\tau}{a^2}s$$

olarak buluruz ve ispat biter.

Teorem 3.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğrisi verilsin, öyle ki

$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s)$(30)

şeklinde ifade edilsin. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)\tilde{T}(s) + \widetilde{m_1}(s)\tilde{N}(s) + \widetilde{m_2}(s)\tilde{B}(s)$(31)

olarak yazılabilir. Burada

$\widetilde{m_0}(s) = m_1(s),$

(32)

$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \tau(s)m_2(s)],$ (33)

$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \kappa(s)m_2(s)]$(34)

şeklinde olup $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s)$ dır. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sıfırdan farklı olmak üzere α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları, $m_0, m_1, m_2: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar, $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$'dir.

İspat. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü ise (3) eşitliği sağlanır.Teorem 2.3. de verilen eşitlikleri denklem (31)'de yerine yazarsak

$$\tilde{\alpha}(s) = T(s)\left(\frac{-\kappa(s)\widetilde{m_1}(s) + \tau(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) + N(s)\widetilde{m_0}(s)$$

$$+B(s)\left(\frac{\tau(s)\widetilde{m_1}(s) + \kappa(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)(35)$$

olduğu görülür. Öte yandan (10) eşitliğini denklem (3)'da yerine yazacak olursak,

$\tilde{\alpha}(s) = (m_0(s) - s + \lambda)T(s) + m_1(s)N(s)$

$+m_2(s)B(s)$(36)

ifadesi elde edilir. Daha sonra (35) ile (36) ifadeleri birbirine eşitlenip, düzenlenirse

$\frac{-\kappa(s)\widetilde{m_1}(s)+\tau(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = m_0(s) - s + \lambda,$ (37)

$\widetilde{m_0}(s) = m_1(s),$

(38)

$\frac{\tau(s)\widetilde{m_1}(s)+\kappa(s)\widetilde{m_2}(s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = m_2(s)$(39)

olur.Aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$\widetilde{m_0}(s) = m_1(s),$

$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \tau(s)m_2(s)],$

$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(m_0(s) - s + \lambda) + \kappa(s)m_2(s)].$

Burada $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$dir.

Sonuç 3.1. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) eğri ve

$\tilde{\alpha}(s) = \widetilde{m_0}(s)\tilde{T}(s) + \widetilde{m_1}(s)\tilde{N}(s) + \widetilde{m_2}(s)\tilde{B}(s)$(40)

olarak verilsin. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi

$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s)$(41)

olarak yazılabilir. Burada

$m_0(s) = \frac{1}{a}[\kappa(s)\widetilde{m_1}(s) + \tau(s)\widetilde{m_2}(s)] + s - \lambda,$ (42)

$m_1(s) = \widetilde{m_0}(s),$ (43)

$m_2(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)\widetilde{m_1}(s) + \kappa(s)\widetilde{m_2}(s)]$(44)

şeklinde ifade edilebilir,$a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$'dir.

Teorem 3.2. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş (gergin) bir W- eğrisi olmak üzere,α eğrisi ile involütü $\tilde{\alpha}$ eğrisi sırasıyla (33) ve (34) eşitlikleri ile verilsin. Bu durumda

$\widetilde{m_0}(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2},$

(45)$\widetilde{m_1}(s) = ac_1\cos(as) - ac_2\sin(as) + \frac{\kappa}{a}(-s + \lambda),$

(46)$\widetilde{m_2}(s) = ac_0 + \frac{\tau}{a}\lambda$(47)

olur. Ayrıca $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s)$ dir. κ ve τ sıfırdan farklı olmak üzere α eğrisinin eğrilikleri, c_i $(0 \leq i \leq 2)$ reel sabitler, $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$'dir.

İspat. Önerme 3.1'de bilinen $m_0(s)$, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ değerlerini Teorem 3.1 ile ifade ettiğimiz eşitliklerde yerine yazarsak,

$\widetilde{m_0}(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2},$

(48)$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}\left[-\kappa\begin{pmatrix} c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) \\ +c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s - s + \lambda \end{pmatrix}\right]$

$+\tau\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right),$

(49)$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}\left[\tau\begin{pmatrix} c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) \\ +\frac{\tau^2}{a^2}s - s + \lambda \end{pmatrix}\right]$

$+\kappa\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right)$(50)

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$\widetilde{m_0}(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2},$

$\widetilde{m_1}(s) = ac_1\cos(as) - ac_2\sin(as) + \frac{\kappa}{a}(-s + \lambda),$

$\widetilde{m_2}(s) = ac_0 + \frac{\tau}{a}\lambda$

ifadeleri elde edilir.

Teorem 3.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden bir N – sabit eğrisi ise α'nın involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi birinci türden bir T – sabit eğrisidir.

İspat. α birinci türden bir$N$ – sabit eğrisi ise $m_1 = m_2 = 0$'dır. Bu ifadeleri (32) eşitliğinde yerine yazarsak $\widetilde{m_0} = 0$ olduğu görülür. Yani $\tilde{\alpha}$ eğrisi birinci türden bir T – sabit eğrisidir.

Teorem 3.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ bir T – sabit eğri olsun. α'nın involütü olan $\tilde{\alpha}$, N – sabit eğrisi olamaz.

İspat. α, birinci türden T – sabit eğri olsun. Bu durumda $m_0 = 0$ dır. Teorem 3.1'den

$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(-s + \lambda) + \tau(s)m_2(s)],$

(51)$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(-s + \lambda) + \kappa(s)m_2(s)]$(52)

olduğu görülür. Buradan

$\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} (-s + \lambda)^2(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) \\ +m_2^2(s)(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) \end{bmatrix},$

(53)

$\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = m_2^2(s) + (-s + \lambda)^2$(54)

ifadesi hiçbir zaman sabit bir fonksiyon olamayacağından $\tilde{\alpha}$, N – sabit eğrisi olamaz. Eğer

α, ikinci türden T – sabit eğrisi ise $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $m_0 = c$ dir. Bu durumda Teorem 5.1'den

$\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = m_2^2(s) + (c - s + \lambda)^2$(55)

elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\alpha}$, N – sabit eğrisi değildir.

Teorem 3.5. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ ikinci türden bir T – sabit ve birinci türden N – sabit ise α'nın involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi N – sabit eğri olamaz.

İspat. α, ikinci türden T – sabit ve birinci türden N – sabit bir eğri ise $m_0 = c$ ve $m_1 = m_2 = 0$ dır. Teorem 3.1.'den

$\widetilde{m_1}(s) = \frac{1}{a}[-\kappa(s)(c - s + \lambda)]$,
(56)

$\widetilde{m_2}(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(c - s + \lambda)]$(57)

olduğu görülür. Buradan $\widetilde{m_1}^2(s) + \widetilde{m_2}^2(s) = (c - s + \lambda)^2$ elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{\alpha}$ bir N – sabit eğri olamaz.

Teorem 3.6. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı birinci türden bir T – sabit eğrisi olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi bir N – sabit eğrisidir.

İspat. $\tilde{\alpha}$ eğrisi birinci türden T – sabit eğri olduğundan $\widetilde{m_0} = 0$'dır. Sonuç 3.1 gereğince $m_1(s) = 0$ olduğu görülür. Bu durumda $m_2'(s) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Denklem (14)'de $m_1(s) = 0$ yerine yazılırsa $m_2'(s) = 0$ olduğu görülür. Sonuçta $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi N – sabit eğrisidir.

Teorem 3.7. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden N – sabit ve ikinci türden T – sabit eğrisi ise $\tilde{\alpha}$'nın evolütü olan α eğrisi ikinci türden bir N – sabit eğrisidir.

İspat. $\tilde{\alpha}$, birinci türden N – sabit ve ikinci türden T – sabit eğrisi olsun. Buna göre $\widetilde{m_0} = c$ ve $\widetilde{m_1} = \widetilde{m_2} = 0$'dır. Sonuç 3.1'e göre

$m_1(s) = c$, (58)

$m_2(s) = 0$(59)

elde edilir. Buradan α eğrisinin ikinci türden N – sabit olduğu görülür.

Teorem 3.8. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden bir T – sabit eğrisi ise $\tilde{\alpha}$'nın evolütü olan α eğrisi hiçbir zaman T – sabit olamaz.

İspat. $\tilde{\alpha}$, birinci türden bir T – sabit eğrisi olduğuna göre $\widetilde{m_0} = 0$ dır. Sonuç 3.1 gereğince $m_1(s) = 0$ dır. Diğer taraftan (12) eşitliğinden $m_0' = 1$ olduğu görülür. Yani $m_0(s)$ hiçbir zaman sabit bir fonksiyon olamaz. O halde $\tilde{\alpha}$'nın evolütü olan α eğrisi T – sabit olamaz.

Teorem 5.9. $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ birinci türden bir N – sabit eğrisi ise $\tilde{\alpha}$ eğrisinin evolütü olan α eğrisi hiçbir zaman T – sabit eğrisi olmaz.

İspat. $\tilde{\alpha}$ birinci türden N – sabit eğrisi ise $\widetilde{m_1}(s) = \widetilde{m_2}(s) = 0$ dır. Sonuç 3.1'e göre $m_0(s) = s - \lambda$ elde edilir. O halde α eğrisi bir T – sabit eğrisi değildir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Birinci türden bir N – sabit eğrisinin involütü birinci türden bir T – sabit eğrisidir.
- Bir T – sabit eğrisinin involütü hiçbir zaman N – sabit eğrisi olamaz.
- Hem ikinci türden T – sabit hem de birinci türden N – sabit eğrisinin involütü hiçbir zaman N – sabit eğri olamaz.
- Birinci türden bir T – sabit eğrisinin evolütü bir N – sabit eğrisidir.
- Birinci türden bir T – sabit eğrisinin evolütü olan α hiçbir zaman T – sabit eğri olamaz.
- Birinci türden bir N – sabit eğrisinin evolütü hiçbir zaman T – sabit eğrisi olmaz.

Kaynaklar

Bozkurt, Z., Gök, I. and Ekmekçi, F. N., 2013. Characterization of rectifying, normal and osculating curves in there dimensional compact Lie groups, *Life Sci*., **10**, 353-362.

Büyükkütük, S. and Öztürk, G., 2015. Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space $\mathbb{E}^3$, *General Mathematical Notes*, **28**, 81-91.

Büyükkütük, S. and Öztürk, G., 2015. Constant Ratio Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean 4 Space $\mathbb{E}^4$, *New Trends in Mathematical Sciences*, **4**, 171-178.

Chen, B. Y., 2001. Constant ratio Hypersurfaces, *Soochow J. Math.,* **27**, 353-362.

Chen, B. Y., 2003. More on convolution of Riemannian manifolds, *Beitrage Algebra Geom.*, **44**, 9-24.

Chen, B. Y., 2003. When does the position vector of space curve always lies in its rectifying plane?, *Amer. Math. Montly*, **110**, 147-152.

Chen, B. Y. and Dillen F., 2005. Rectifying curves as centrodes and extremal curves, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, **33**, 77-90.

Do Cormo, M. P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice – Hall, New Jersey, 511s.

Gürpınar, S., Arslan, K. and Öztürk, G. 2014. A Characterization of Constant-Ratio Curves in Euclidean 3-Space $\mathbb{R}^3$. *arXiv:1410.5577v1 [math.DG]*, 1-10.

Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H., 2008. A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^n$, *Proc. Estonian Acad. Sciences,* **57**, 217-224.

Öztürk, G., Kişi, İ. and Büyükkütük, S., 2017. Constant-Ration Quaternionic Curves in Euclidean Space, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **27**, 1659-1673.

Sabuncuoğlu, A., 2014. Diferensiyel Geometri, *Nobel,* Ankara-Türkiye, 514s.

Yüce, S., 2017. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, *Pegem Akademi,* Ankara-Türkiye, 557s.