Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **18** (2018) **011305** (868-877) AKU J. Sci. Eng. **18** (2018) **011305** (868-877)

DOİ: 10.5578/fmbd.67745

Araştırma Makalesi / Research Article

Çift Dizilerin Fuzzy n-Normlu Uzaylarda Lacunary $\mathcal{I}_2$-Yakınsaklığı ve Bazı Özellikleri Üzerine

Muhammed Recai Türkmen

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Afyonkarahisar.

e-posta: mrtmath@gmail.com

Geliş Tarihi:24.09.2018 ; Kabul Tarihi: 03.12.2018

Anahtar kelimeler
Çift dizi;
İstatiksel yakınsaklık;
Lacunary yakınsaklık;
İdeal yakınsaklık;
Fuzzy n-norm.

Özet

Bu çalışmada çift dizilerin lacunary ideal yakınsaklığı fuzzy n-norm kullanarak yeniden tanımlanmıştır. Çalışmada ilk olarak fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için lacunary ideal yakınsaklık kavramına yer verilmiş, daha sonra bu yakınsama ile ilgili temel teoremlere değinilmiştir. İkinci olarak θ-yakınsaklık kavramını fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için tanıtıp, θ-yakınsaklık ile lacunary ideal yakınsaklık arasındaki ilişki fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için incelenmiştir. Son olarak, fuzzy n-normlu uzaylarda $Fn\theta_2$-Cauchy ve $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}$-Cauchy kavramları ve bu kavramlarla ilgili teoremlerin ifadeleri verilmiştir.

On Lacunary $\mathcal{I}_2$-Convergence Of Double Sequences And Some Properties In Fuzzy n-Normed Space

Keywords
Double sequence;
Statistical convergence;
Lacunary convergence;
Ideal convergence;
Fuzzy n-norm.

Abstract

In this study, firstly lacunary ideal convergence of double sequences is introduced in fuzzy n-normed spaces. And then basic definitions and theorems about lacunary ideal convergence for double sequences are given in fuzzy n-normed spaces. Secondly, we introduce the concept of θ-convergence of double sequences in fuzzy n-normed spaces, and the relation between θ-convergence and lacunary ideal convergence is investigated for double sequences in fuzzy n-normed spaces. Finally, in fuzzy n-normed spaces, the concept of $Fn\theta_2$-Cauchy and $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}$-Cauchy and the theorems related to these concepts are given.

1. Giriş

Fast (1951) ve Schoenberg (1959) birbirlerinden bağımsız olarak reel sayı dizilerinin yakınsaklık kavramını genişleterek istatistiksel yakınsaklık kavramını ortaya çıkardılar. Genel anlamda istatistiksel yakınsak diziler, metrik uzaylardaki klasik yakınsaklığın birçok özelliğini sağlarlar. Bu alanda Šalát (1980) ve Fridy (1985) nin çalışmalarından sonra birçok çalışma yapılmış ve istatistiksel yakınsaklık kavramı da genişletilerek ideal yakınsaklık kavramı ortaya çıkmıştır. İlk defa Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanan $\mathcal{I}$-yakınsaklık tanımı, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin $\mathcal{I}$ ideal yapısına dayanan bir tanımdır. Kostyrko vd. (2005) daha sonraki çalışmalarında $\mathcal{I}$-yakınsaklığın bazı temel özelliklerini vermişler ve $\mathcal{I}$-limit noktaları ile ilgilenmişlerdir. Kumar (2007), Šalát vd. (2005) ve Tripathy ve Tripathy (2005) nin yaptığı çalışmalardan sonra bu alanda birçok gelişme meydana gelmiştir. Özellikle Fridy ve Orhan (1993a, 1993b) ın yaptığı çalışmalar, ideal yakınsama kavramı ile birleştirilmiş ve son zamanlarda bu çalışmalar farklı uzaylarda Depnath (2012), Tripathy vd. (2012), Kara ve İlkhan (2016), Hazarika (2016), Kara vd. (2017) ve Türkmen (2018) tarafından incelenmiştir.

İstatiksel yakınsaklığın çift dizilere genişletilmesi ilk defa Mursaleen ve Edely (2003) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmadan sonra başta Dündar ve Altay (2014), Dündar vd. (2016), Kumar (2017) olmak üzere birçok araştırmacı çift diziler üzerine araştırmalar yapmışlardır. Bu çalışmalara yön verecek farklı bir dizi ilk defa Matloka (1986) tarafından fuzzy sayıların klasik yakınsaması ile ilgili "fuzzy sayı dizileri" adlı çalışmasında verilmiş ve bu çalışmada bazı fuzzy sayı dizilerinin temel teoremleri ispat edilmiştir. Fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını ve istatiksel Cauchy dizilerini ise ilk defa Nuray ve Savaş (1995) çalışmıştır. Bu çalışmalardan sonra Şençimen ve Pehlivan (2008) istatiksel yakınsaklık ve istatiksel Cauchy kavramlarını, Hazarika (2013) ideal yakınsaklık ve ideal Cauchy kavramlarını, Dündar ve Talo (2013a, 2013b) fuzzy sayıların çift dizileri için $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2$-Cauchy kavramlarını, Hazarika ve Kumar (2014) fuzzy normlu uzaylarda çift diziler için $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2$-Cauchy kavramlarını, Türkmen ve Çınar (2017) lacunary istatiksel yakınsaklık kavramını ve Türkmen ve Dündar (2018) çift diziler için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını fuzzy normlu uzaylarda tanımlamışlardır.

Bir vektör uzayı üzerinde fuzzy norm kavramı ilk defa Katsaras (1984) tarafından ortaya atılmış, daha sonra ise Felbin (1992) tarafından fuzzy normlu uzay kavramı tanımlanmıştır. Narayanan ve Vijayabalaji (2005) ise fuzzy n-normlu uzaylar üzerinde ilk çalışmaları yapmışlardır. n-normlu uzaylarda istatiksel yakınsaklığı ve bazı sonuçlarını Reddy (2010) çalıştıktan sonra Reddy ve Srinivas (2015) bu çalışmayı fuzzy n-normlu uzaylarda yapmışlardır. Biz ise bu çalışmamızda daha önce Türkmen (2019a) tarafından yapılan çalışmalardan ilham alarak lacunary ideal yakınsaklığı çift diziler için fuzzy n-normlu uzaylarda tanımlayıp bazı özelliklerini ve sonuçlarını vereceğiz. Şimdi istatiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık, fuzzy sayı, fuzzy norm, fuzzy n-norm, çift dizi, lacunary dizi gibi bazı temel tanım ve teoremleri; Bag ve Samanta (2008), Diamond ve Kloeden (1994), Mizumoto ve Tanaka (1979), Nanda (1989), Nuray (1989), Pringsheim (1900), Rath ve Tripaty (1994), Türkmen ve Çınar (2018), Türkmen (2018, 2019b), ve Zadeh (1965) den ve daha önce bahsettiğimiz kişilerden faydalanarak hatırlatalım.

İlk olarak fuzzy sayılardan bahsedecek olursak, her bir $x \in X$ elemanı, $[0,1]$ kapalı aralığında bir değere sahip olan $u(x)$ üyelik derecesine sahip bir elemana karşılık gelmektedir. Burada $u(x)=0$ olması üye olmadığı, $u(x)=1$ olması tam üye olduğu anlamına gelirken, $0<u(x)<1$ olması ise kısmi üye olması anlamına gelir. Zadeh'e göre X in bir fuzzy alt kümesi, bazı $u: X \to [0,1]$ fonksiyonları için $X \times [0,1]$ in boştan farklı bir $\{(x,u(x)) : x \in X\}$ alt kümesine denir. Burada u fonksiyonu genellikle fuzzy küme olarak kullanılır.

$\mathbb{R}$ üzerinde bir u fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa fuzzy sayı olarak adlandırılır.

i. u normaldir, yani en azından bir $x_0 \in \mathbb{R}$ var öyle ki $u(x_0)=1$
ii. u fuzzy konvekstir, yani $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \le \lambda \le 1$ için $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min[u(x), u(y)]$;
iii. u üst yarı süreklidir;
iv. $[u]_0$, ile gösterilen $sup\, u = cl\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$, kümesi kompakttır.

Fuzzy sayıların tümünü $L(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Eğer $t<0$ için $u \in L(\mathbb{R})$ ve $u(t)=0$ ise u ya negatif olmayan fuzzy sayı denir. Tüm negatif olmayan fuzzy sayıların kümesini $L^*(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $u \in L^*(\mathbb{R})$ olabilmesi için gerek ve yeter şart her bir $\alpha \in [0,1]$ için $u_\alpha^- \ge 0$ olmasıdır diyebiliriz. Açıkça $\tilde{0} \in L(\mathbb{R})$ olduğu görülüyor. $u \in L(\mathbb{R})$ için u nun α seviye kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}: u(x) \ge \alpha\}, & \alpha \in (0,1] \\ sup\, u \quad , & \alpha = 0. \end{cases}$$

α-seviye kümeleriyle ilgili bazı aritmetik işlemler ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$\alpha \in (0,1]$ ve $u, v \in L(\mathbb{R})$ için $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ ve $[v]_\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$ ise,

$[u \oplus v]_\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+]$,

$[u \ominus v]_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^+, u_\alpha^+ - v_\alpha^-]$,

$[u \odot v]_\alpha = [u_\alpha^- . v_\alpha^-, u_\alpha^+ . v_\alpha^+]$,

$[\tilde{1} \oplus u]_\alpha = \left[\frac{1}{u_\alpha^+}, \frac{1}{u_\alpha^-}\right], u_\alpha^- > 0$ dır.

$u, v \in L(\mathbb{R})$ için $L(\mathbb{R})$ üzerinde supremum metriği

$$D(u,v) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \max\{|u_\alpha^- - v_\alpha^-|, |u_\alpha^+ - v_\alpha^+|\}$$

şeklinde tanımlanır. $L(\mathbb{R})$ üzerinde D nin bir metrik olduğu ve $(L(\mathbb{R}), D)$ nin bir tam metrik uzay olduğu gösterilebilir.

$x = (x_k)$ fuzzy sayıların bir dizisi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için en azından bir k_0 pozitif sayısı var öyle ki $k > k_0$ için $D(x_k, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi x_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir. Ayrıca fuzzy sayıların $x = (x_k)$ dizisi x_0 fuzzy sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1)$ için $[x_k]_\alpha = [(x_k)_\alpha^-, (x_k)_\alpha^+]$ ve $[x_0]_\alpha = [(x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+]$ olmak üzere $\lim_{k\to\infty} [x_k]_\alpha = [x_0]_\alpha^-$ ve $\lim_{k\to\infty} [x_k]_\alpha = [x_0]_\alpha^+$ olmasıdır.

Fuzzy sayıların istatistiksel yakınsaklığı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır;

$x = (x_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{\mathrm{k} \leq \mathrm{n}: \bar{\mathrm{d}}(x_k, x_0) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi x_0 sayısına istatiksel yakınsaktır denir. Bu tanımdan sonra, birçok matematikçi fuzzy sayıların istatistiksel yakınsaklığı üzerinde çalışmış ve bu çalışmaları fuzzy normlu uzaylara genişletmişlerdir.

Şimdi ise fuzzy norm tanımını ve fuzzy normlu uzaylarda yapılan yakınsaklık tanımlarını verelim.

X, $\mathbb{R}$ üzeride bir vektör uzayı, $\|.\|: X \to L^*(\mathbb{R})$ ve sırasıyla sol ve sağ norm olarak adlandırılan $L, R: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dönüşümleri $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ şartlarını sağlayan simetrik ve azalmayan dönüşümler olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $(X, \|.\|, L, R)$ dörtlüsüne fuzzy normlu lineer uzay yada kısaca $(X, \|.\|)$ FNS denir ve $\|.\|$ dönüşümüne de fuzzy norm denir;

1. $\|x\| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $x = 0$,

2. $x \in X, r \in \mathbb{R}$ için $\|rx\| = |r|\|x\|$,

3. Her $x, y \in X$ için

(a) $s \leq \|x\|_1^-, t \leq \|y\|_1^-$ ve $s + t \leq \|x + y\|_1^-$ iken $\|x + y\|(s + t) \geq L\big(\|x\|(s), \|y\|(t)\big)$,

(b) $s \geq \|x\|_1^-, t \geq \|y\|_1^-$ ve $s + t \geq \|x + y\|_1^-$ iken $\|x + y\|(s + t) \leq R\big(\|x\|(s), \|y\|(t)\big)$.

$(X, \|.\|)$ fuzzy normlu uzayın topolojik yapısı düşünüldüğünde herhangi bir $\varepsilon > 0, \alpha \in [0,1]$ ve $x \in X$, için x in (ε, α) −komşuluğu $\mathcal{N}_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X: \| x - y \|_\alpha^+ < \varepsilon\}$ kümesi ile gösterilir.

Şençimen ve Pehlivan (2008) fuzzy normlu uzaylarda yakınsaklığı şöyle tanımlamıştır;

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay ve $(x_n)_{n=1}^\infty$, X de bir dizi olsun. Eğer $(D) - \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \tilde{0}$ ise bu dizi $x \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy norma göre yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{FN} x$ şeklinde gösterilir. Yani her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $n \geq N(\varepsilon)$ için $D\big(\|x_n - x\|, \tilde{0}\big) < \varepsilon$ dur. Bu da her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $n \geq N(\varepsilon)$ için $\sup_{\alpha\in[0,1]} \|x_n - x\|_\alpha^+ = \|x_n - x\|_0^+ < \varepsilon$ olması demektir.

İstatistiksel yakınsaklığın fuzzy normlu uzaylarda tanımı ise aşağıdaki şekildedir;

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $(x_n)_{n=1}^\infty$ X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\big(\big\{k \in \mathbb{N}: D\big(\|x_k - L\|, \tilde{0}\big) \geq \varepsilon\big\}\big) = 0$$

ise bu dizi $L \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy norma göre istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{FS} x$ şeklinde gösterilir. Buda her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}: \|x_k - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olması demektir. Kısaca, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için $\|x_k - L\|_0^+ < \varepsilon$ olması demektir.

Çift diziler için yakınsaklık tanımları ise şu şekildedir;

$x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ reel sayıların bir çift dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ için $|x_{mn} - L| < \varepsilon$ oluyorsa (x_{mn}) dizisi Pringsheim anlamında L noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ şeklinde gösterilir.

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ için $D\big(\|x_{mn} - L\|, \tilde{0}\big) < \varepsilon$

oluyorsa (x_{mn}) dizisi fuzzy norma göre L noktasına yakınsaktır denir ve $x_{mn} \overset{FN}{\to} L$ şeklinde gösterilir.

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2\left(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : D(\|x_{mn} - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise bu dizi $L \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy norma göre istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_{mn} \overset{FS_2}{\to} L$ şeklinde gösterilir.

İdeal ve filtre tanımları ise aşağıdaki şekildedir;

X boştan farklı bir küme olmak üzere X in alt kümelerinin bir $\mathcal{I}$ sınıfı ;

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

2. $A, B \in \mathcal{I}$ iken $A \cup B \in \mathcal{I}$,

3. $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ iken $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlanıyorsa X in bir ideali olduğu söylenir. $X \notin \mathcal{I}$ ise aşikar olmayan ideal denir.

X boştan farklı bir küme olmak üzere X in alt kümelerinin $\mathcal{F}$ sınıfı ;

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

2. $A, B \in \mathcal{F}$ iken $A \cap B \in \mathcal{F}$,

3. $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ iken $B \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa X in bir filtresi olduğu söylenir. $\mathcal{I}$ aşikar olmayan ideal ve X boştan farklı bir küme ise $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : (\exists A \in \mathcal{I})(M = X \backslash A)\}$ sınıfına X üzerinde $\mathcal{I}$ ile ilişkili filtre denir.

Aşikar olmayan bir $\mathcal{I}$ ideali, her $x \in X$ için eğer $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise admissible ideal olarak adlandırılır.

Aşikar olmayan bir $\mathcal{I}_2$ ideali her $i \in \mathbb{N}$ için eğer $\{i\} \times \mathbb{N} \in \mathcal{I}_2$ ve $\mathbb{N} \times \{i\} \in \mathcal{I}_2$ ise kuvvetli admissible ideal olarak adlandırılır.

Bu tanımlar kullanılarak ideal yakınsaklığın fuzzy normlu uzaylardaki ifadesi şu şekildedir;

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{mn} - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_2$ ye ait ise bu diziye fuzzy norma göre $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2$ −yakınsaktır denir ve $x_{mn} \overset{\mathcal{I}_2}{\to} L$ şeklinde gösterilir.

Şimdi lacunary dizi tanımını vererek çift diziler için lacunary ideal yakınsaklık tanımından bahsedelim. $\theta_2 = \{(k_r, j_u)\}$ dizisi $k_0 = 0$, $j_0 = 0$ ve $r, u \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$, $\bar{h}_u = j_u - j_{u-1} \to \infty$ olacak şekilde artan bir tamsayı dizisi ise bu diziye çift lacunary dizi denir. q_2 tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $J_u = (j_{u-1}, j_u]$ şeklinde gösterilirken $I_{ru} = I_r \times J_u$ ve $h_{ru} = h_r . \bar{h}_u$ olarak alınır.

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(r,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{h_{ru}} \sum_{(m,n) \in I_{ru}} D(\| x_{mn} - L \|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi $\mathcal{I}_2$ ye ait ise $x = (x_{mn})$ dizisine X üzerindeki fuzzy norma göre $L \in X$ noktasına lacunary $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir. Bu durumda $x_{mn} \overset{F\mathcal{I}_2^\theta}{\to} L$ veya $x_{mn} \to L(F\mathcal{I}_2^\theta)$ veya $F\mathcal{I}_2^\theta - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L$ şeklide gösterilir.

Buraya kadar verdiğimiz tanımlarda gördüğümüz gibi kullandığımız normlar klasik ve fuzzy normların tek boyutluları idi. Şimdi ise son verdiğimiz tanımı fuzzy n-normlu uzaylarda gösterebilmek için fuzzy n-norm tanımını yapacağız.

$2 \leq d < \infty$ olmak üzere X uzayı d boyutlu bir lineer uzay olmak üzere ve $\|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\| : X^n \to L^*(\mathbb{R})$ olsun. Sırasıyla sol ve sağ norm olarak adlandırılan $L, R : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dönüşümleri $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ şartlarını sağlayan simetrik ve azalmayan dönüşümler olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $(X, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|, L, R)$ dörtlüsüne fuzzy n-normlu lineer uzay yada kısaca $(X, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|)$ FnNS denir ve $\|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|$ dönüşümüne de fuzzy n-norm denir;

Her $y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ve $s, t \in \mathbb{R}$ için

fnN_1: $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineer bağımlı vektörlerdir,

fnN_2: $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ değeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nin herhangi bir permütasyonunda değişmeyendir,

fnN_3: Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ dir,

fnN_4: $\|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|(s+t) \geq L(\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|(s), \|y, x_2, \ldots, x_n\|(t))$ her ne zaman $s \leq \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$, $t \leq \|y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ve $s + t \leq \|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ise

fnN_5: $\|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|(s+t) \leq R(\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|(s), \|y, x_2, \ldots, x_n\|(t))$ her ne zaman $s \geq \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$, $t \geq \|y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ve $s + t \geq \|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ise .

Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, 0 \leq \alpha \leq 1$ için,

$$[\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|]_\alpha = [\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_\alpha^-, \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_\alpha^+]$$

ve $\inf_{\alpha \in [0,1]} \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_\alpha^- > 0$ dir. Böylece $\|\cdot, \cdot, \ldots, \cdot\|$ normu X üzerinde fuzzy n-norm ve $(X, \|\cdot, \cdot, \ldots, \cdot\|)$ çiftide fuzzy n-normlu uzay olarak adlandırılır. Şimdi fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için lacunary $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık tanımını verebiliriz. İleriki aşamalarda tekrardan kaçınmak için aksi belirtilmediği sürece $\mathcal{I}_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi kuvvetli admissible ideal, $\theta_{kl} = \{(r_k, t_l)\}$ çift lacunary dizi, $(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ fuzzy n-normlu uzay, $x = (x_{rt})_{(r,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ X de bir çift dizi ve $z_2, z_3, \ldots z_n \in X$ olarak alınacaktır.

2. Lacunary $\mathcal{I}_2$ −Yakınsaklık

Bu bölümde fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için lacunary ideal yakınsaklık kavramı ve ilgili teoremleri verilecektir. Aksi belirtilmediği sürece $\theta_{kl} = \{(r_k, t_l)\}$ tarafından belirlenen aralıklar $J_k = (r_{k-1}, r_k]$ ve $\bar{J}_l = (t_{l-1}, t_l]$ olmak üzere, $J_{kl} = J_k \times \bar{J}_l$ ve $h_k = r_k - r_{k-1}$, $\bar{h}_l = t_l - t_{l-1}$ olmak üzere $h_{kl} = h_k . \bar{h}_l$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.1. $x = (x_{rt})_{(r,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ dizisi X de bir çift dizi olmak üzere, herbir $\varepsilon > 0$ için eğer

$$\left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} D(\|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}_2$ ya ait ise, x dizisi $L_1 \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy n-norma göre lacunary $\mathcal{I}_2$ −yakınsaktır denir. Bu durumda $x_{rt} \xrightarrow{Fn\mathcal{I}_2^\theta} L_1$, $x_{rt} \to L_1(Fn\mathcal{I}_2^\theta)$ veya $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim_{r,t \to \infty} x_{rt} = L_1$ gösterimlerinden birini kullanabiliriz. L_1 değerine ise (x_{rt}) nin $Fn\mathcal{I}_2^\theta$ −limiti denir.

Teorem 2.1. X üzerindeki fuzzy n-norma göre $x = (x_{rt})$ dizisi lacunary $\mathcal{I}_2$ −yakınsak ise yakınsadığı nokta tektir yani $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x$ tektir.

İspat: Varsayalım ki $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_2$ olsun. Bu durumda herbir $\varepsilon > 0$, için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım;

$$A_1 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$A_2 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_2$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A_1 \in \mathcal{I}_2$ ve $A_2 \in \mathcal{I}_2$ dir. O halde $A_3 = A_1 \cup A_2$ olarak aldığımızda da $A_3 \in \mathcal{I}_2$ olacaktır. Bu durumda $(A_3)^c$ kümesi $F(\mathcal{I}_2)$ içerisinde boştan farklı bir küme olacaktır. $(k,l) \in (A_3)^c$ olacak şekilde bir eleman aldığımızda ise

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve}$$

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Açıkça, alacağımız en azından bir $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$$\|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\|x_{pq} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t) \in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde ederiz. Buda bizim

$$\|L_1 - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \leq \|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ + \|x_{pq} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde etmemizi sağlar. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\|L_1 - L_2, z_2, z_3, \ldots, z_n\|_0^+ = 0$ elde ederiz. Buda bize $L_1 = L_2$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x$ in tek olduğu sonucuna varırız.

Teorem 2.2. (x_{rt}) ve (y_{rt}) X de iki çift dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki aritmetik işlemler vardır.

i) Eğer $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x_{rt} = L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim y_{rt} = L_2$ ise $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim(x_{rt} \mp y_{rt}) = L_1 \mp L_2$ dir.

ii) Eğer $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x_{rt} = L_1$ ise $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim c x_{rt} = cL_1$ dir.

İspat: i) Bu ispatın sadece toplama kısmını göstermemiz yeterli olacaktır. Yani $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x_{rt} = L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim y_{rt} = L_2$, ise $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim(x_{rt} + y_{rt}) = L_1 + L_2$ dir. Çıkarma kısmı benzer şekilde yapılabilir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım;

$$\mathrm{B}_1 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$B_2 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|y_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

$Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim y = L_2$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $B_1 \in \mathcal{I}_2$ ve $B_2 \in \mathcal{I}_2$ dir. O halde $B_3 = B_1 \cup B_2$ olarak aldığımızda da $B_3 \in \mathcal{I}_2$ olacaktır. Bu durumda $(B_3)^c$ kümesi $F(\mathcal{I}_2)$ içerisinde boştan farklı bir küme olacaktır. Şimdi ise

$$(B_3)^c \subset \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1 + y_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon\right\}$$

kapsamasının doğru olduğunu gösterelim.

$(k,l) \in (B_3)^c$ olsun. Bu durumda

$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ ve
$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ bulunur.
Buradan, alacağımız bir $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$\left\|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\right\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ ve

$\left\|y_{pq} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\right\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|y_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ elde ederiz. Buda bize

$\|x_{rt} - L_1 + y_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \leq \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ + \|y_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon$

eşitsizliğini verir. Bu durumda aşağıdaki kapsama gösterilmiş olur.

$$(B_3)^c \subset \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1 + y_{rt} - L_2, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon\right\}.$$

$(B_3)^c \in F(\mathcal{I}_2)$ olduğundan

$\left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|(x_{rt} + y_{rt}) - (L_1 + L_2), z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_2$ dır. Böylece $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim(x_{rt} + y_{rt}) = L_1 + L_2$ elde edilir.

ii) $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x_{rt} = L_1$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ için, aşağıdaki kümeyi tanımlayalım.

$$\mathrm{C} = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}.$$

Bu durumda $\mathrm{C} \in F(\mathcal{I}_2)$ dir. $(k,l) \in \mathrm{C}$ olacak şekilde bir eleman aldığımızda

$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{|c|}$

$\frac{|c|}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < |c|.\frac{\varepsilon}{|c|}$

$\frac{1}{h_r} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} |c|\|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon$

$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|c.x_{rt} - c.L_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon$

elde edilir. Böylece,

$$\mathrm{C} \subset \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|cx_{rt} - cL_1, z_2, z_3, \ldots z_n\|_0^+ < \varepsilon\right\}$$ ve

$$\left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|cx_{rt} - cL_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \varepsilon\right\} \in F(\mathcal{I}_2)$$

elde edilir. Buradan $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim cx_{rt} = cL_1$ elde edilir.

3. $\boldsymbol{\theta_2}$ −Yakınsaklık

Bu bölümde, fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için θ_2 −yakınsaklık tanımını verip bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Aynı zamanda θ_2 −yakınsaklıkla $Fn\mathcal{I}_2^\theta$ −yakınsaklık arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 3.1. $x = (x_{rt})$, X de bir çift dizi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için en azından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $k, l > n_0$ için

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} D\left(\| x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n \|, \tilde{0}\right) < \varepsilon$$

oluyorsa bu diziye, X üzerindeki fuzzy n-normlu uzayda $L_1 \in X$ noktasına θ_2 −yakınsaktır denir. Bu durumda $x_{rt} \overset{Fn\theta_2}{\rightarrow} L_1$, $x_{rt} \rightarrow L_1(Fn\theta_2)$ veya $Fn\theta_2 - \lim\limits_{r,t\to\infty} x_{rt} = L_1$ gösterimlerinden biri ile gösterilir. Buradaki L_1 elemanına X de (x_{rt}) nin $Fn\theta_2$ −limiti denir.

Teorem 3.1. $x = (x_{rt})$ çift dizisi X üzerinde tanımlı fuzzy n-norma göre θ_2 −yakınsak ise bu yakınsadığı nokta yani $Fn\theta_2 - \lim x$ tektir.

İspat: Kabul edelim ki $Fn\theta_2 - \lim x = L_1$ ve $Fn\theta_2 - \lim x = L_2$ olsun. Bu durumda her bir $\varepsilon > 0$ bir $n_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $k, l > n_1$ için

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği vardır. Aynı şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ ve her $k, l > n_2$ için de

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ olarak aldığımızda, her $k, l > n_0$ için bir $(p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ var öyleki

$$\left\|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\left\|x_{pq} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned}\|L_1 - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ &\le \left\|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ \\ &+ \left\|x_{pq} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ < \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\|L_1 - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ = 0$ elde ederiz. Buda $L_1 = L_2$ demektir. Yani $Fn\theta_2 - \lim x$ tektir.

Teorem 3.2. $x = (x_{rt})$, X de bir çift dizi olsun. Eğer $Fn\theta_2 - \lim x = L_1$ ise $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $Fn\theta_2 - \lim x = L_1$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyleki her $k, l \ge n_0$ için

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \varepsilon$$

dur. Bu yüzden aşağıdaki kapsama vardır.

$$K = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ \ge \varepsilon\right\}$$
$$\subset (\mathbb{N}\times\{1,2,3,\dots,n_0 - 1\}) \cup (\{1,2,3,\dots,n_0 - 1\}\times\mathbb{N})$$

Dolayısıyla $K \in \mathcal{I}_2$ dir. Böylece $Fn\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_1$ bulunur.

Teorem 3.3. $x = (x_{rt})$, X de bir çift dizi olsun. Eğer $Fn\theta_2 - \lim x = L_1$ ise x in bir $\left(x_{r_i t_j}\right)$ alt dizisi vardır öyleki $x_{r_i t_j} \overset{FN}{\rightarrow} L_1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $Fn\theta_2 - \lim x = L_1$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyleki her $k, l \ge n_0$ için

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \varepsilon$$

dur. Açıkça her bir $k, l \ge n_0$ için $\left(r_i, t_j\right) \in J_{kl}$ olacak şekilde seçersek

$$\left\| x_{r_i t_j} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n \right\|_0^+ <$$
$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \| x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n \|_0^+ < \varepsilon$$

ifadesini elde ederiz. Bu da bize $x_{r_i t_j} \overset{FN}{\rightarrow} L_1$ olduğunu gösterir.

4. $Fn\theta_2 -$ Cauchy ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta$ −Cauchy

Tanım 4.1. X de bir $x = (x_{rt})$ çift dizisi alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ var öyle ki her $k, l \geq n_0$ için

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \| x_{rt} - x_{pq}, z_2, z_3, \dots z_n \|_0^+ < \varepsilon$$

sağlanıyorsa X üzerinde tanımlı fuzzy n-norma göre x dizisine $Fn\theta_2$ −Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.2. X de bir $x = (x_{rt})$ çift dizisi alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ var öyleki

$$\left\{ (k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \| x_{rt} - x_{pq}, z_2, z_3, \dots z_n \|_0^+ < \varepsilon \right\} \in F(\mathcal{I}_2)$$

sağlanıyorsa X üzerinde tanımlı fuzzy n-norma göre x dizisine $F\mathcal{I}_2^\theta$ −Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.1. X de bir $x = (x_{rt})$ çift dizisi X deki fuzzy n-norma göre $Fn\theta_2$ −Cauchy dizisi ise aynı norma göre $Fn\mathcal{I}_2^\theta$ −Cauchy dizisidir.

İspat: Teorem 3.2 nin bir benzeri olduğundan aynı adımlar izlenerek kolayca gösterilebilir.

Teorem 4.2. X de bir $x = (x_{rt})$ çift dizisi fuzzy n-norma göre eğer $Fn\theta_2$ −Cauchy dizisi ise bu durumda $x = (x_{rt})$ nin fuzzy n-norma göre bir Cauchy alt dizisi vardır.

İspat: Bu ispat Teorem 3.3. e benzer şekilde yapılabilir.

5. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada ilk olarak fuzzy n-normlu uzaylarda $Fn\mathcal{I}_2^\theta$ −yakınsaklık ve $Fn\theta_2$ −yakınsaklık kavramlarını verip bu limit noktalarının tek olduğunu gösterdik. Ayrıca bir x çift dizisi için $Fn\theta_2 - \lim x = L_1$ ise $\mathrm{Fn}\mathcal{I}_2^\theta - \lim x = L_1$ olacağını gösterdik. Son olarakta $Fn\theta_2$ −Cauchy ve $Fn\mathcal{I}_2^\theta$ −Cauchy tanımlarını ve bazı özelliklerini verdik. Çalışmamız da özellikle tek dizilerde verilen özelliklerin çift dizilerde belirli şartlar altında korunduğunu, aynı zamanda seçilen fuzzy n-normdan bağımsız olarak özelliklerin fuzzy n-norma taşınabileceğini gördük. Bu çalışmadan sonra farklı normlarda yapılan benzer çalışmaların n-normlara veya çift dizilere taşımanın mümkün olup olmadığı üzerine araştırmalar yapılabilir.

6. Kaynaklar

Bag, T. and Samanta, S. K., 2008. Fixed point theorems in Felbin's type fuzzy normed linear spaces. *J. Fuzzy Math.,* **16**(1), 243–260.

Debnath, P., 2012. Lacunary ideal convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces. *Computers &Mathematics With Applications,* **63**(3), 708–715.

Diamond, P. and Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets-Theory and Applications. *World Scientific Publishing,* Singapore.

Dündar, E. and Talo, Ö., 2013a. $\mathcal{I}_2$-convergence of double sequences of fuzzy numbers. *Iranian Journal of Fuzzy Systems,* **10**(3), 37–50.

Dündar, E. and Talo, Ö., 2013b. $\mathcal{I}_2$-Cauchy Double Sequences of Fuzzy Numbers. *Gen. Math. Notes,* **16**(2), 103-114.

Dündar, E. and Altay, B., 2014. $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of double sequences. *Acta Mathematica Scientia,* **34**(2), 343–353.

Dündar, E., Ulusu, U. and Pancaroğlu, N., 2016. Strongly $\mathcal{I}_2$-Lacunary Convergence and $\mathcal{I}_2$-Lacunary Cauchy Double Sequences of Sets. *The Aligarh Bulletin of Mathematics,* **35**(1,2), 1–15.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique *Colloq. Math.,* **2**, 241–244.

Felbin, C., 1992. Finite-dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and Systems,* **48**(2), 239–248.

Fridy, J. A., 1985. On statistical convergence. *Analysis,* **5**, 301–313.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993a. Lacunary statistical summability. *Jour Math. Anal. Appl.,* **173**(2), 497-504.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993b. Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics,* **160**(1), 43--51.

Hazarika, B., 2013. On ideal convergent sequences in fuzzy normed linear spaces. *Afrika Matematika,* **25**(4), 987–999.

Hazarika, B. and Kumar, V., 2014. Fuzzy real valued $\mathcal{I}$-convergent double sequences in fuzzy normed spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,* **26**, 2323–2332.

Hazarika, B., 2016. Lacunary ideal convergence of multiple sequences. *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* **24**, 54–59.

Kara, E. E. and İlkhan, M., 2016. Lacunary $\mathcal{I}$-convergent and lacunary $\mathcal{I}$ -bounded sequence spaces defined by an Orlicz function. *Electron. J. Math. Anal. Appl.,* **4**(2), 150-159.

Kara, E. E., Dastan, M. and İlkhan, M., 2017. On Lacunary ideal convergence of some sequences. *New Trends in Mathematical Sciences,* **5**(1), 234-242.

Katsaras, A. K., 1984. Fuzzy topological vector spaces. *Fuzzy sets and systems,* **12**, 143—154.

Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilczyński, W., 2000. $\mathcal{I}$-Convergence. *Real Analysis Exchange,* **26**(2), 669—686.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T. and Sleziak, M., 2005. $\mathcal{I}$-Convergence and Extermal $\mathcal{I}$-limits points. *Mathematica Slovaca,* **55**, 443--464.

Kumar, V., 2007. On $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergence of double sequences. *Math. Commun.,* **12**. 171–181.

Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers. *Busefal,* **28**. 28–37.

Mizumoto, M. and Tanaka, K., 1979. Some properties of fuzzy numbers Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. *North-Holland* Amsterdam.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H., 2003. Statistical convergence of double sequences. *J. Math. Anal. Appl.,* **28,** 223–231.

Nanda, S., 1989. On sequences of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets Systems,* **33**, 123–126.

Narayan, A. L. and Vijayabalaji, S., 2005. Fuzzy n-normed linear space. *International journal of mathematics and mathematical sciences,* **24**, 3963-3977

Nuray, F., 1989. Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems,* **99**, 353–355.

Nuray, F. and Savaş, E., 1995. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Math. Slovaca,* **45**(3), 269–273.

Pringsheim, A., 1900. Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. *Math. Ann.,* **53,** 289–321.

Rath, D. and Tripaty, B. C., 1994. On statistically convergence and statistically Cauchy sequences. *Indian J. Pure Appl. Math.,* **25**(4), 381–386.

Reddy, B. S., 2010. Statistical convergence in n-normed spaces. *International Mathematical Forum,* **5**(24), 1185-1193.

Reddy, B. S. and Srinivas, M., 2015. Statistical Convergence in Fuzzy n-Normed Spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* **104**(1), 29-42.

Šalát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca,* **30**, 139–150.

Šalát, T., Tripaty, B. C. and Ziman, M., 2005. On $\mathcal{I}$-convergence field. *Ital. J. Pure Appl. Math.,* **17**, 45–54.

Schoenberg, I. J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly,* **66,** 361–375.

Sencimen, C. and Pehlivan, S., 2008. Statistical convergence in fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* **159,** 361–370.

Tripathy, B. and Tripathy, B. C., 2005. On $\mathcal{I}$-convergent double sequences. *Soochow J. Math.,* **31,**549–560.

Tripathy, B. C., Hazarika, B. and Choudhary, B., 2012. Lacunary $\mathcal{I}$-convergent sequences. *Kyungpook Math. J.,* **52,** 473–482.

Türkmen, M. R., 2019a. On Lacunary ideal convergence and some properties in fuzzy normed spaces. *under communication.*

Türkmen, M. R. and Çınar, M., 2017. Lacunary Statistical Convergence in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Applied and Computational Mathematics,* **6**(5), 233–237.

Türkmen, M. R. and Çınar, M., 2018. λ-Statistical Convergence in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,* **34**(6), 4023–4030.

Türkmen, M. R. and Dündar, E., 2018. On Lacunary Statistical Convergence of Double Sequences and Some Properties in Fuzzy Normed Spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* DOI:10. 3233/JIFS-18841.

Türkmen, M. R., 2019b. On Lacunary İdeal Convergence and Some Properties in Fuzzy n-Normed Spaces. *under communication.*

Türkmen, M. R., 2018. On Lacunary Statistical Convergence and Some Properties in Fuzzy n-Normed Spaces. *i-manager's Journal on Mathematics.,***7**(3), preprint.

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Inform. Contr.,* **8**, 29-44.