Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD 19 (2019) **011301** (71-78) AKU J. Sci. Eng. **19** (2019) **011301** (71-78)

Doi: 10.35414/akufemubid.497173

Araştırma Makalesi / Research Article

3-Boyutlu Minkowski Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin T*N*B*-Smarandache Eğrileri

Özgür Boyacıoğlu Kalkan[1*], Hakan Öztürk[1], Damla Zeybek[2]

[1]*Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, Afyonkarahisar*

[2]*Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Afyonkarahisar*

**Sorumlu Yazar, e posta: bozgur@aku.edu.tr, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1665-233X*

hozturk@aku.edu.tr, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1229-3153

damlazeybek433@gmail.com, ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-5504-3441

Geliş Tarihi:17.12.2018 ; Kabul Tarihi:09.04.2019

Anahtar kelimeler
İnvolüt-Evolüt Eğrileri, Smarandache Eğrileri, Minkowski-Uzayı, Frenet Elemanları.

Öz

Bu çalışmada, γ^* spacelike eğrisi γ timelike eğrisinin bir involütü olmak üzere γ^* eğrisinin Frenet vektörleri konum vektörleri olarak alındığında null olmayan $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması γ timelike evolüt eğrisine bağlı olarak hesaplanmıştır. Son olarak, elde edilen sonuçlar ile ilgili örnekler verilmiştir.

T*N*B*-Smarandache Curves of Involute-Evolute Curves In Minkowski 3-space

Keywords
İnvolute-Evolute Curves, Smarandache Curves, Minkowski-Space, Frenet Invariants.

Abstract

In this study, the curvature and the torsion of non-null $T^*N^*B^*$-Smarandache curve are calculated according to the timelike evolute curve γ, when the Frenet vectors of the spacelike involute curve γ^* are taken as the position vectors where γ^* spacelike curve be the involute of timelike curve γ. Finally, illustrative examples related to the results are given.

1. Giriş

Eğriler kavramı diferensiyel geometrinin temel konularından birisidir. Son yıllarda özel eğriler ile ilgili olarak birçok çalışma yapılmıştır. Özel eğriler, karşılıklı noktalarında bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri ile diğer eğrinin Frenet vektörlerinden birinin denk olduğu eğrilerdir. İnvolüt-Evolüt eğrileri de bu eğrilerden birisidir. İnvolüt eğri kavramı optik çalışmaları sırasında daha doğru ölçüm yapmaya çalışırken C. Huygens tarafından 1658 yılında keşfedilmiştir. İnvolüt-Evolüt eğrilerin özelliği her noktasında teğet vektörleri ortogonal olan eğrilerdir. Millmann ve Parker (1977) ve Hacısalihoğlu (1983), klasik geometride bu konu ile ilgili iyi bilinen temel teorem ve problemlere açıklık getirmişlerdir. İnvolüt-Evolüt eğrileri üzerine yapılan çalışmalar sadece Öklid uzayında sınırlı kalmamış Minkowski uzayı, Galileo uzayı, Heisenberg uzayı ve dual uzay gibi birçok uzayda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve pek çok yeni karakterizasyon elde edilmiştir.

Bilici ve Çalışkan, Minkowski 3-uzayda timelike binormalli spacelike bir eğrinin involüt eğrilerini (Bilici ve Çalışkan 2009) ayrıca diğer bir çalışmada timelike bir eğrinin involüt eğrilerini incelemişlerdir (Bilici ve Çalışkan 2011). Bükçü ve Karacan, Minkowski 3-uzayda spacelike binormalli spacelike bir eğrinin evolüt eğrilerini incelemişlerdir (Bükçü ve Karacan 2007).

Turgut ve Yılmaz, Minkowski uzay-zamanda konum vektörü başka bir eğrinin Frenet vektörleri tarafından oluşturulan yeni eğriyi Smarandache eğrisi olarak adlandırmışlardır (Turgut ve Yılmaz 2008). Bu çalışmada, R_1^4 de bu eğrilerden TB_2 Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır. Daha sonraki yıllarda bu eğriler değişik uzaylarda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Şenyurt ve Çalışkan Frenet çatısına göre Mannheim eğri çiftlerinin N^*C^*-Smarandache eğrilerini incelemişlerdir (Şenyurt ve Çalışkan 2015). Benzer olarak diğer bir çalışmada ise Şenyurt, Çalışkan ve Çelik Frenet çatısına göre Bertrand eğri çiftlerinin N^*C^*-Smarandache eğrilerini araştırmışlardır (Şenyurt vd. 2016). Gürses, Bektaş ve Yüce Minkowski 3-uzayda spacelike, timelike ve null eğrilerin TN-Smarandache eğrilerinin Frenet elemanlarını, eğrilik ve burulmasını hesaplamışlardır (Gürses vd. 2016).

Bu çalışmada $\gamma*$ eğrisi γ eğrisinin involütü olmak üzere T^*, N^*, B^* Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında bu vektörler tarafından oluşturulan null olmayan $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrilerinin kausal karakteri belirlenerek eğrinin Frenet elemanları, eğrilik ve burulması α evolüt eğrisinin Frenet elemanları, eğrilik ve burulmasına bağlı olarak ifade edilmiştir. Son olarak bu eğrilerle ilgili örnekler verilmiştir.

2. Temel Kavramlar

Bu bölümde Minkowski 3-uzay ve İnvolüt-Evolüt eğrileri ile ilgili temel kavramlar kısaca tanıtılacaktır. $Y=(y_1,y_2,y_3)\in R_1^3$ olmak üzere 3-boyutlu Minkowski uzayında Lorentz iç çarpımı $g(Y,Y)=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$ olsun. $g(Y,Y)\rangle 0$ ya da $Y=0$ ise Y vektörüne spacelike, $g(Y,Y)\langle 0$ ise Y vektörüne timelike, $g(Y,Y)=0$ ve $Y\neq 0$ ise Y vektörüne ise null (lightlike) denir (O'Neill 1983).

Benzer olarak R_1^3 de, s pseudo-yay parametresi olmak üzere keyfi bir $\gamma=\gamma(s)$ eğrisinin $\gamma'(s)$ hız vektörleri spacelike, timelike ve null ise γ eğrisine sırasıyla spacelike, timelike ve null eğri denir. Y vektörünün normu $\|Y\|_L=\sqrt{|g(Y,Y)|}$ biçiminde tanımlanır. $u=(u_1,u_2,u_3)$ ve $v=(v_1,v_2,v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,u_1v_3-u_3v_1,u_2v_1-u_1v_2)$$

biçiminde tanımlanır (Lopez 2014). $\gamma=\gamma(s)$ yay parametreli regüler bir eğri, $\{T,N,B\}$ Frenet çatısı, κ ve τ sırasıyla eğrilik ve burulması olsun. γ eğrisinin kausal karakterine bağlı olarak Frenet formülleri ve Darboux vektörleri:

i) γ eğrisi birim hızlı timelike bir eğri ise Frenet elemanları, eğrilik ve burulması

$$\begin{aligned}
&T(s)=\alpha'(s), \qquad \kappa(s)=\sqrt{\langle T'(s),T'(s)\rangle},\\
&N(s)=(T'/\kappa)(s), \qquad B(s)=-(T\times N)(s),\\
&\tau(s)=(\langle \alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle/\|\alpha'\times\alpha''\|^2)(s)
\end{aligned} \tag{1}$$

biçimindedir (Woestijne 1990). Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned}
&T\times N=-B, \quad N\times B=T, \quad B\times T=-N,\\
&T'=\kappa N, \quad N'=\kappa T-\tau B, \quad B'=\tau N
\end{aligned}$$

şeklindedir. Timelike bir eğrinin Darboux vektörü $W=\tau T-\kappa B$ biçiminde ifade edilir (Uğurlu 1997).

ii) γ eğrisi spacelike binormalli spacelike bir eğri ise Frenet elemanları, eğrilik ve burulması

$$\begin{aligned}
&T(s)=\alpha'(s), \qquad \kappa(s)=\sqrt{-\langle T'(s),T'(s)\rangle},\\
&N(s)=T'(s)/\kappa(s), \qquad B(s)=-(T\times N)(s),\\
&\tau(s)=-(\langle \alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle/\|\alpha'\times\alpha''\|^2)(s)
\end{aligned} \tag{2}$$

biçimindedir (Woestijne 1990). Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned}
&T\times N=-B, \quad N\times B=-T, \quad B\times T=N,\\
&T'=\kappa N, \quad N'=\kappa T+\tau B, \quad B'=\tau N
\end{aligned}$$

şeklindedir. Spacelike eğrinin Darboux vektörü $W=-\tau T+\kappa B$ biçiminde ifade edilir (Uğurlu 1997).

iii) γ eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğri ise Frenet elemanları, eğrilik ve burulması

$$\begin{aligned}
&T(s)=\alpha'(s), \qquad \kappa(s)=\sqrt{\langle T'(s),T'(s)\rangle},\\
&N(s)=T'(s)/\kappa(s), \qquad B(s)=T(s)\times N(s),\\
&\tau(s)=(\langle \alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle/\|\alpha'\times\alpha''\|^2)(s)
\end{aligned} \tag{3}$$

biçimindedir (Woestijne 1990). Frenet formülleri ise

$$\begin{aligned}
&T\times N=B, \quad N\times B=-T, \quad B\times T=-N,\\
&T'=\kappa N, \quad N'=-\kappa T+\tau B, \quad B'=\tau N
\end{aligned}$$

şeklindedir. Spacelike bir eğrinin Darboux vektörü $W=\tau T-\kappa B$ biçiminde ifade edilir (Uğurlu 1997).

Tanım 2.1. $\gamma^*=\gamma^*(s)$ ve $\gamma=\gamma(s)$ R_1^3de iki eğri, γ^* ve γ eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T^*,N^*,B^*\}$ ve $\{T,N,B\}$ olmak üzere

$$g(T^*,T)=0$$

ise γ^* eğrisine γ eğrisinin involütü (γ eğrisine ise γ^* eğrisinin evolütü) denir (Bilici ve Çalışkan 2011).

Lemma 2.1. γ^* eğrisi γ eğrisinin involütü olmak üzere (I,α) ve (I,β) koordinat komşuluğunda verilen iki eğri olsun. γ^* ve γ eğrileri arasındaki uzaklık

$$d(\gamma^*(s),\gamma(s))=|c-s|,\quad c=sbt \quad \forall s\in I$$

biçiminde ifade edilir (Bilici ve Çalışkan 2011).

Tanım 2.1. $\gamma=\gamma(s)$ eğrisi timelike bir eğri, $-B$ spacelike birim vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentz timelike açı θ ve W vektörünün birim vektörü C olsun.

i) $|\kappa|\rangle|\tau|$ ise W spacelike vektör ve

$$\begin{aligned}&\kappa=\|W\|\cosh\theta, && \|W\|^2=g(W,W)=\kappa^2-\tau^2,\\ &\tau=\|W\|\sinh\theta, && C=\frac{W}{\|W\|}=\sinh\theta T-\cosh\theta B,\end{aligned} \tag{4}$$

ii) $|\kappa|\langle|\tau|$ ise W timelike vektör ve

$$\begin{aligned}&\kappa=\|W\|\sinh\theta, && \|W\|^2=g(W,W)=\tau^2-\kappa^2,\\ &\tau=\|W\|\cosh\theta, && C=\frac{W}{\|W\|}=\cosh\theta T-\sinh\theta B\end{aligned} \tag{5}$$

eşitlikleri sağlanır (Bilici ve Çalışkan 2011).

Teorem 2.1. γ^* spacelike eğrisi, timelike γ eğrisinin involütü olsun. B ve N^* vektörleri arasındaki Lorentz timelike açı θ olmak üzere γ^* eğrisi ile γ eğrisinin Frenet vektörleri arasında

i) W spacelike bir vektör ($|\kappa|\rangle|\tau|$) ise

$$\begin{bmatrix}T^*\\N^*\\B^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\cosh\theta&0&\sinh\theta\\-\sinh\theta&0&\cosh\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\N\\B\end{bmatrix}, \tag{6}$$

ii) W timelike bir vektör ($|\kappa|\langle|\tau|$) ise

$$\begin{bmatrix}T^*\\N^*\\B^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\sinh\theta&0&-\cosh\theta\\-\cosh\theta&0&\sinh\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\N\\B\end{bmatrix} \tag{7}$$

bağıntıları vardır (Bilici ve Çalışkan 2011).

Sonuç 2.1. γ^* eğrisi, timelike γ eğrisinin involütü olsun. Bu taktirde γ ve γ^* eğrisinin kausal karakteri

i) W spacelike vektör ($|\kappa|\rangle|\tau|$) ise

$\{T\ timelike,\ N\ spacelike,\ B\ spacelike\}$,
$\{T^*\ spacelike,\ N^*\ timelike,\ B^*\ spacelike\}$.

ii) W timelike vektör ise

$\{T\ timelike,\ N\ spacelike,\ B\ spacelike\}$,
$\{T^*\ spacelike,\ N^*\ spacelike,\ B^*\ timelike\}$.

şeklindedir (Bilici ve Çalışkan 2011).

3. Minkowski 3-Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Null Olmayan T*N*B*-Smarandache Eğrileri

R_1^3 de γ^* spacelike eğrisi, timelike γ eğrisinin involütü ve γ^* eğrisinin Frenet çatısı $\{T^*,N^*,B^*\}$ olsun. Bu durumda

$$\beta_1(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(T^*+N^*+B^*) \tag{8}$$

şeklinde tanımlı birim vektörün tanımladığı diferensiyellenebilir eğriye $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi denir. Hesaplamalarda β_1 eğrisinin s_{β_1} e göre yay parametreli olduğu kabul edecektir.

i) γ^* spacelike binormalli spacelike bir eğri olsun. (8) ifadesinde T^*, N^* ve B^* vektörlerinin yerine (6) ifadesinden eşitleri yazılarak tekrar düzenlenirse

$$\beta_1(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-(\sinh\theta+\cosh\theta)T+N\\+(\sinh\theta+\cosh\theta)B\end{bmatrix} \tag{9}$$

eşitliği elde edilir. (9) ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1}\frac{ds_{\beta_1}}{ds}=\frac{\begin{matrix}(\kappa-\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta))T-\|W\|N\\+(\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau)B\end{matrix}}{\sqrt{3}} \tag{10}$$

$$\langle\beta_1',\beta_1'\rangle=\frac{2\theta'\|W\|}{3} \tag{11}$$

bulunur. Bu taktirde β_1 null olmayan bir eğri olduğundan (11) ifadesinden $\theta^{'}\|W\|\rangle 0$ veya $\theta^{'}\|W\|\langle 0$ olacaktır. $\exists\theta^{'},\|W\|\in R$ için $\langle \beta_1^{'},\beta_1^{'}\rangle \neq 1$ olduğundan β_1 eğrisi s ye göre yay parametreli değildir.

i.1) $\theta^{'}\|W\|\rangle 0$ ise $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi β_1 spacelike bir eğri olduğundan (10) denklemi tekrar düzenlenirse $\dfrac{ds_{\beta_1}}{ds}=\dfrac{\sqrt{2\theta^{'}\|W\|}}{\sqrt{3}}$ ve $\|W\|^2=\kappa^2-\tau^2$ olmak üzere

$$T_{\beta_1}=\frac{\begin{bmatrix}(\kappa-\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta))T-\|W\|N\\ +(\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau)B\end{bmatrix}}{\sqrt{2\theta^{'}\|W\|}} \qquad (12)$$

İfadesi elde edilir.

i.1.1) β_1, timelike binormalli spacelike bir eğri olsun. (12) ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$\omega_1=(-(\theta^{''}+\theta^{'2})(\sinh\theta+\cosh\theta)+\kappa^{'}-\kappa\|W\|)\sqrt{\theta^{'}\|W\|}$$
$$+(\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)+\kappa)\left(\sqrt{\theta^{'}\|W\|}\right)^{'},$$
$$\omega_2=(-\theta^{'}\|W\|+\|W\|^2-\|W\|^{'})\sqrt{\theta^{'}\|W\|}+\|W\|\left(\sqrt{\theta^{'}\|W\|}\right)^{'},$$
$$\omega_3=((\theta^{''}+\theta^{'2})(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau^{'}+\tau\|W\|)\sqrt{\theta^{'}\|W\|}$$
$$-(\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau)\left(\sqrt{\theta^{'}\|W\|}\right)^{'}$$

olmak üzere

$$T_{\beta_1}^{'}(s)=\frac{\sqrt{3}(\omega_1T+\omega_2N+\omega_3B)}{2(\theta'\|W\|)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu durumda β_1 eğrisinin eğriliği κ_{β_1}, asli normali N_{β_1} ve binormali B_{β_1} sırasıyla

$$\kappa_{\beta_1}=\|T_{\beta_1}^{'}\|=\frac{\sqrt{3(-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}}{2\left(\theta'\|W\|\right)^{3/2}},$$

$$N_{\beta_1}=\frac{T_{\beta_1}^{'}}{\|T_{\beta_1}^{'}\|}=\frac{\omega_1T+\omega_2N+\omega_3B}{\sqrt{-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}},$$

$$B_{\beta_1}=\frac{\begin{matrix}-[\omega_3\|W\|+\omega_2\left((\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau\right)]T\\ +[\omega_1\tau-\omega_3\kappa-\left(\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)\right)(\omega_1+\omega_3)]N\\ +[\omega_2\left(\theta^{'}(\sinh\theta+c\operatorname{osh}\theta)-\kappa\right)-\omega_1\|W\|]B\end{matrix}}{\sqrt{2\theta'\|W\|\left(-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)}}$$

şeklinde bulunur. β_1 eğrisinin burulması τ_{β_1} ile gösterilirse

$$\varpi_1=(\sinh\theta+\cosh\theta)\left(-\theta^{''}\|W\|+\theta^{'}\left(\|W\|^{'}-\|W\|^2\right)\right)$$
$$-\tau\left(\theta^{'}\|W\|+\|W\|^{'}\right)+\tau^{'}\|W\|,$$
$$\varpi_2=-\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)\left(\kappa^{'}-\tau^{'}+\|W\|(\tau-\kappa)\right)$$
$$+(\theta^{''}+\theta^{'2})\|W\|-\kappa\tau^{'}-\tau\kappa^{'}+2\kappa\tau\|W\|,$$
$$\varpi_3=(\sinh\theta+\cosh\theta)\left(\theta^{''}\|W\|+\theta^{'}\left(\|W\|^2-\|W\|^{'}\right)\right)$$
$$+\kappa\left(\theta^{'}\|W\|+\|W\|^{'}\right)+\kappa^{'}\|W\|,$$
$$\Omega_1=-(\sinh\theta+\cosh\theta)\left(\theta^{'''}+3\theta^{'}\theta^{''}+\theta^{'3}\right)+\kappa^{''}$$
$$-\kappa^{'}\|W\|-2\kappa\|W\|^{'}-\theta^{'}\kappa\|W\|+\kappa\|W\|^2,$$
$$\Omega_2=\left(\theta^{''}+\theta^{'2}\right)\left(-\|W\|+\|W\|\|W\|^{'}-\|W\|^3\right)-\|W\|^{''}$$
$$-\|W\|\left(2\|W\|^{'}-\theta^{''}\right)-\theta^{'}\|W\|^{'},$$
$$\Omega_3=-(\sinh\theta+\cosh\theta)\left(\theta^{'''}+3\theta^{'}\theta^{''}+\theta^{'3}\right)$$
$$-\tau^{''}+\tau^{'}\|W\|+2\tau\|W\|^{'}+\theta^{'}\tau\|W\|-\tau\|W\|^2$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_1}=\frac{\sqrt{3}\left(-\varpi_1\Omega_1+\varpi_2\Omega_2+\varpi_3\Omega_3\right)}{-\varpi_1^2+\varpi_2^2+\varpi_3^2}$$

elde edilir.

i.1.2) β_1, spacelike binormalli spacelike bir eğri olsun. Bu taktirde β_1 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla

$$T_{\beta_1}=\frac{\begin{bmatrix}(\kappa-\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta))T-\|W\|N\\ +(\theta^{'}(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau)B\end{bmatrix}}{\sqrt{2\theta^{'}\|W\|}},$$

$$N_{\beta_1}=\frac{T_{\beta_1}^{'}}{\|T_{\beta_1}^{'}\|}=\frac{\omega_1T+\omega_2N+\omega_3B}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2}},$$

$$B_{\beta_1}=\frac{\begin{array}{l}[\omega_3\|W\|+\omega_2\left((\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau\right)]T\\ -[\omega_1\tau-\omega_3\kappa-\left(\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)\right)(\omega_1+\omega_3)]N\\ -[\omega_2\left(\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)-\kappa\right)-\omega_1\|W\|]B\end{array}}{\sqrt{2\theta'\|W\|\left(-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)}},$$

$$\kappa_{\beta_1}=\|T'_{\beta_1}\|=\frac{\sqrt{3(\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2)}}{2\left(\theta'\|W\|\right)^{3/2}},$$

$$\tau_{\beta_1}=\frac{\sqrt{3}\left(\varpi_1\Omega_1-\varpi_2\Omega_2-\varpi_3\Omega_3\right)}{-\varpi_1^2+\varpi_2^2+\varpi_3^2}$$

şeklinde elde edilir.

i.2) $\theta'\|W\|\langle 0$ ise $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi β_1 timelike bir eğridir. Bu taktirde $\frac{ds_{\beta_1}}{ds}=\frac{\sqrt{2|\theta'|\|W\|}}{\sqrt{3}}$. ve $\|W\|^2=\kappa^2-\tau^2$ olmak üzere β_1 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$T_{\beta_1}=\frac{\left[\begin{array}{l}(\kappa-\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta))T-\|W\|N\\ +(\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau)B\end{array}\right]}{\sqrt{2|\theta'|\|W\|}},$$

$$N_{\beta_1}=\frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|}=\frac{\omega_1T+\omega_2N+\omega_3B}{\sqrt{-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}},$$

$$B_{\beta_1}=\frac{\begin{array}{l}[\omega_3\|W\|+\omega_2\left((\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)-\tau\right)]T\\ -[\omega_1\tau-\omega_3\kappa-\left(\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)\right)(\omega_1+\omega_3)]N\\ -[\omega_2\left(\theta'(\sinh\theta+\cosh\theta)-\kappa\right)-\omega_1\|W\|]B\end{array}}{\sqrt{2|\theta'|\|W\|\left(-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)}},$$

$$\kappa_{\beta_1}=\|T'_{\beta_1}\|=\frac{\sqrt{3(-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}}{2\left(|\theta'|\|W\|\right)^{3/2}},$$

$$\tau_{\beta_1}=\frac{\sqrt{3}\left(-\varpi_1\Omega_1+\varpi_2\Omega_2+\varpi_3\Omega_3\right)}{-\varpi_1^2+\varpi_2^2+\varpi_3^2}$$

elde edilir.

ii) γ^* timelike binormalli spacelike bir eğri ise (7) ifadesinden T^*, N^* ve B^* vektörlerinin eşitleri yazılarak (8) ifadesi tekrar düzenlenirse

$$\beta_1(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\begin{array}{l}(\sinh\theta-\cosh\theta)T+N\\ +(\sinh\theta-\cosh\theta)B\end{array}\right] \tag{13}$$

elde edilir. (13) ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1}\frac{ds_{\beta_1}}{ds}=\frac{\begin{array}{c}(\theta'(\cosh\theta-\mathrm{sinhh}\,\theta)+\kappa)T-\|W\|N\\ +(\theta'(\cosh\theta-\mathrm{sinhh}\,\theta)-\tau)B\end{array}}{\sqrt{3}}, \tag{14}$$

$$\left\langle\beta_1',\beta_1'\right\rangle=\frac{2\left(\|W\|^2-\theta'\|W\|\right)}{3} \tag{15}$$

ifadeleri elde edilir. β_1 null olmayan bir eğri olduğundan (15) ifadesinden $\|W\|^2-\theta'\|W\|\rangle 0$ veya $\|W\|^2-\theta'\|W\|\langle 0$ olacaktır. $\exists\theta'$, $\|W\|\in R$ için $\left\langle\beta_1',\beta_1'\right\rangle\neq 1$ olduğundan β_1 eğrisi s ye göre yay parametreli değildir.

ii.1) $\|W\|^2-\theta'\|W\|\rangle 0$ ise $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi β_1 spacelike bir eğridir. (14) ifadesi tekrar düzenlenirse $\frac{ds_{\beta_1}}{ds}=\frac{\sqrt{2\left(\|W\|^2-\theta'\|W\|\right)}}{\sqrt{3}}$ ve $\|W\|^2=\tau^2-\kappa^2$ olmak üzere

$$T_{\beta_1}=\frac{\begin{array}{c}(\theta'(\cosh\theta-\sinh\theta)+\kappa)T-\|W\|N\\ +(\theta'(\cosh\theta-\sinh\theta)-\tau)B\end{array}}{\sqrt{2\left(\|W\|^2-\theta'\|W\|\right)}} \tag{16}$$

elde edilir.

ii.1.1) β_1 timelike binormalli spacelike bir eğri olsun. Bu taktirde

$$\begin{array}{l}x=\|W\|^2-\theta'\|W\|\\ v_1=((\theta''-\theta'^2)(\cosh\theta-\sinh\theta)+\kappa'-\kappa\|W\|)\sqrt{x}\\ \quad-(\theta'(\cosh\theta-\sinh\theta)+\kappa)\left(\sqrt{x}\right)',\\ v_2=(\theta'\|W\|-\|W\|^2-\|W\|')\sqrt{x}+\|W\|\left(\sqrt{x}\right)',\\ v_3=((\theta''-\theta'^2)(\cosh\theta-\sinh\theta)-\tau'+\tau\|W\|)\sqrt{x}\\ \quad-(\theta'(\cosh\theta-\sinh\theta)-\tau)\left(\sqrt{x}\right)'\end{array}$$

olmak üzere β_1 eğrisinin teğet vektörü T_{β_1}, asli normali N_{β_1}, binormali B_{β_1} ve eğriliği κ_{β_1}

$$T_{\beta_1} = \frac{\begin{bmatrix} (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa)T - \|W\| N \\ + (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau)B \end{bmatrix}}{\sqrt{2\left(\|W\|^2 - \theta'\|W\|\right)}},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|} = \frac{(\nu_1 T + \nu_2 N + \nu_3 B)}{\sqrt{-\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}},$$

$$B_{\beta_1} = \frac{\begin{array}{l} -[\nu_3\|W\| + \nu_2\left((\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau\right)]T \\ +[\left(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta)\right)(\nu_3 - \nu_1) + \nu_3\kappa + \nu_1\tau]N \\ -[\nu_2\left(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa\right) + \nu_1\|W\|]B \end{array}}{\sqrt{2\left(\|W\|^2 - \theta'\|W\|\right)\left(-\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2\right)}},$$

$$\kappa_{\beta_1} = \|T'_{\beta_1}\| = \frac{\sqrt{3(-\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)}}{2\left(\|W\|^2 - \theta'\|W\|\right)^{3/2}}$$

elde edilir. β_1 eğrisinin burulması τ_{β_1} ise

$$\bar{\nu}_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)\left(-\theta''\|W\| + \theta'\left(\|W\|^2 + \|W\|'\right)\right) + \tau\left(\theta'\|W\| - 2\|W\|^2 - \|W\|'\right) + \tau'\|W\|,$$

$$\bar{\nu}_2 = \theta'(\cosh\theta - \sinh\theta)\left(-\kappa' - \tau' + \|W\|(\kappa + \tau)\right) + (\theta'' - \theta'^2)\|W\| - \kappa\tau' + \tau\kappa',$$

$$\bar{\nu}_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)\left(-\theta''\|W\| + \theta'\left(\|W\|^2 + \|W\|'\right)\right) + \kappa\left(-\theta'\|W\| + \|W\|' + 2\|W\|^2\right) - \kappa'\|W\|,$$

$$\Pi_1 = (\cosh\theta - \sinh\theta)\left(\theta''' - 3\theta'\theta'' - \theta'^3\right) + \kappa'' - \kappa'\|W\| - 2\kappa\|W\|' + \theta'\kappa\|W\| - \kappa\|W\|',$$

$$\Pi_2 = \left(\theta'' - \theta'^2\right)\left(\|W\| - \|W\|\|W\|' + \|W\|^3\right) + \theta'\|W\|' + \|W\|\left(\theta'' - 2\|W\|'\right) + \|W\|'',$$

$$\Pi_3 = (\cosh\theta - \sinh\theta)\left(\theta''' - 3\theta'\theta'' - \theta'^3\right) - \tau'' + \tau'\|W\| + 2\tau\|W\|' - \theta'\tau\|W\| + \tau\|W\|^2$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{3}\left(-\bar{\nu}_1\Pi_1 + \bar{\nu}_2\Pi_2 + \bar{\nu}_3\Pi_3\right)}{-\bar{\nu}_1^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\nu}_3^2}$$

bulunur.

ii.1.2) β_1 spacelike binormalli bir eğri olsun. Bu taktirde β_1 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$T_{\beta_1} = \frac{\begin{bmatrix} (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa)T - \|W\| N \\ + (\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau)B \end{bmatrix}}{\sqrt{2\left(\|W\|^2 - \theta'\|W\|\right)}},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|} = \frac{(\nu_1 T + \nu_2 N + \nu_3 B)}{\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2}},$$

$$B_{\beta_1} = \frac{\begin{array}{l} [\nu_3\|W\| + \nu_2\left((\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) - \tau\right)]T \\ -[\left(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta)\right)(\nu_3 - \nu_1) + \nu_3\kappa + \nu_1\tau]N \\ +[\nu_2\left(\theta'(\cosh\theta - \sinh\theta) + \kappa\right) + \nu_1\|W\|]B \end{array}}{\sqrt{2\left(\|W\|^2 - \theta'\|W\|\right)\left(\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2\right)}},$$

$$\kappa_{\beta_1} = \|T'_{\beta_1}\| = \frac{\sqrt{3(\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2)}}{2\left(\|W\|^2 - \theta'\|W\|^2\right)^{3/2}},$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sqrt{3}\left(\bar{\nu}_1\Pi_1 - \bar{\nu}_2\Pi_2 - \bar{\nu}_3\Pi_3\right)}{-\bar{\nu}_1^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\nu}_3^{2,}}$$

elde edilir.

ii.2) $\|W\|^2 - \theta'\|W\| \langle 0$ ise $T^*N^*B^*$ **-**Smarandache eğrisi β_1 timelike bir eğridir. Bu taktirde $\dfrac{ds_{\beta_1}}{ds} = \dfrac{\sqrt{2\left|\|W\|^2 - \theta'\|W\|\right|}}{\sqrt{3}}$ ve $\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$ olmak üzere β_1 eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$T_{\beta_1}=\frac{\begin{array}{l}(\theta^{'}(\cosh\theta-\sinh\theta)+\kappa)T-\|W\|N\\+(\theta^{'}(\cosh\theta-\sinh\theta)-\tau)B\end{array}}{\sqrt{2\|W\|^2-\theta^{'}\|W\|}},$$

$$N_{\beta_1}=\frac{T_{\beta_1}^{'}}{\|T_{\beta_1}^{'}\|}=\frac{(v_1T+v_2N+v_3B)}{\sqrt{-v_1^2+v_2^2+v_3^2}},$$

$$B_{\beta_1}=\frac{\begin{array}{l}[v_3\|W\|+v_2\left((\theta^{'}(\cosh\theta-\sinh\theta)-\tau\right)]T\\-[\left(\theta^{'}(\cosh\theta-\sinh\theta)\right)(v_3-v_1)+v_3\kappa+v_1\tau]N\\+[v_2\left(\theta^{'}(\cosh\theta-\sinh\theta)+\kappa\right)+v_1\|W\|]B\end{array}}{\sqrt{2\|W\|^2-\theta^{'}\|W\|\left(-v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)}},$$

$$\kappa_{\beta_1}=\|T_{\beta_1}^{'}\|=\frac{\sqrt{3(-v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}{2\|W\|^2-\theta^{'}\|W\|^{3/2}},$$

$$\tau_{\beta_1}=\frac{\sqrt{3}\left(-\bar{v}_1\Pi_1+\bar{v}_2\Pi_2+\bar{v}_3\Pi_3\right)}{-\bar{v}_1^{\,2}+\bar{v}_2^{\,2}+\bar{v}_3^{\,2}}$$

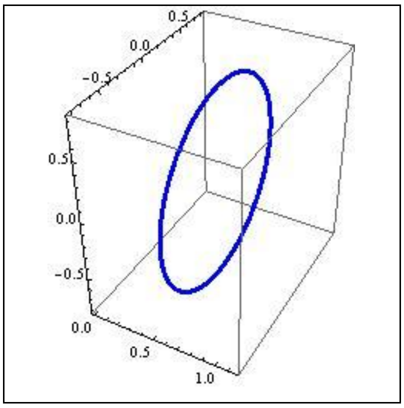
bulunur.

4. Örnekler

Örnek 4.1. $\alpha(s)=\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}s,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos s,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sin s\right)$, s yay parametreli timelike eğri olsun. α eğrisinin, α^* involüt eğrisinin parametrik denklemi

$$\alpha^*(s)=\left(\begin{array}{l}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}s+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}|c-s|,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos s-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}|c-s|\sin s,\\\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sin s+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}|c-s|\cos s\end{array}\right)$$

şeklindedir. $\alpha^*(s)$ involüt eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması ise $T^*(s)=\left(0,-\cos s,-\sin s\right)$, $N^*(s)=\left(0,\sin s,-\cos s\right)$, $B^*(s)=(1,0,0)$ $\kappa^*(s)=1$ ve $\tau^*(s)=0$ şeklinde elde edilir. İnvolüt eğrisine ait $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi Şekil 1 de gösterilmiştir.

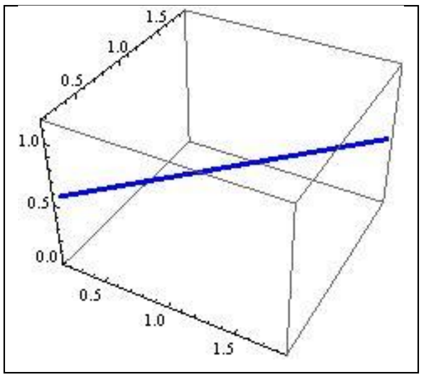


Şekil 1: $\alpha^*(s)$ eğrisine ait $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi

Örnek 4.2. $\gamma(s)=\left(2\sinh\frac{s}{\sqrt{3}},2\cosh\frac{s}{\sqrt{3}},\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$, s yay parametreli timelike eğri olsun. γ eğrisinin, γ^* involüt eğrisinin parametrik denklemi

$$\gamma^*(s)=\left(\begin{array}{l}2\sinh\frac{s}{\sqrt{3}}+\frac{2|c-s|}{\sqrt{3}}\cosh\frac{s}{\sqrt{3}},\\2\cosh\frac{s}{\sqrt{3}}+\frac{2|c-s|}{\sqrt{3}}\sinh\frac{s}{\sqrt{3}},\frac{s}{\sqrt{3}}+\frac{|c-s|}{\sqrt{3}}\end{array}\right)$$

şeklindedir. $\gamma^*(s)$ involüt eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması $T^*(s)=\left(\sinh\frac{s}{\sqrt{3}},\cosh\frac{s}{\sqrt{3}},0\right)$, $N^*(s)=\left(\cosh\frac{s}{\sqrt{3}},\sinh\frac{s}{\sqrt{3}},0\right)$, $B^*(s)=(0,0,-1)$, $\kappa^*(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $\tau^*(s)=0$ şeklinde elde edilir. İnvolüt eğrisine ait $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi Şekil 2 de gösterilmiştir.



Şekil 2: $\gamma^*(s)$ eğrisine ait $T^*N^*B^*$-Smarandache eğrisi

5. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, γ timelike eğrisinin γ^* involüt eğrisinden elde edilen null olmayan $T^*N^*B^*$-Smarandache-eğrilerinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması γ evolüt eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulmasına bağlı olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde yapılan bu çalışma (γ^*,γ) Bertrand eğri çiftleri ve (γ^*,γ) Mannheim eğri çiftleri için de yapılabilir.

Kaynaklar

Akutagawa, K. and Nishikawa, S., 1990. The gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-Space. *Töhoko Mathematical. Journal*, **42**, 67-82.

Bilici, M. and Çalışkan, M., 2013. On the involutes of spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-Space. *International Mathematical Forum*, **4 (31***)*, 1497-1509.

Bilici, M. and Çalışkan, M., 2011. Some new notes on the involutes of the timelike curves in Minkowski 3-Space. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, **6 (41**), 2019-2030.

Bükçü, B. and Karacan, M.K., 2007. On the involute and evolute curves of spacelike curves with a spacelike binormal in Minkowski 3-Space. *International Journal of Mathematical. Sciences*, **2 (5**), 221-232.

Gürses, N., Bektaş, Ö. and Yüce, S., 2016. Special Smarandache curves in R_1^3. *Communications Faculty of Sciences. University of Ankara Series. A1 Mathematics and Statics*, **65 (2)**, 143-160.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983. Differensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.2, Malatya, 895s.

Lopez, R., 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, **7 (1)**, 44-107.

Millman, R. S. and Parker, G. D., 1977. Elements of Differential Geometri. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs New Jersey*,* 275s.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London.

Şenyurt, S. and Çalışkan, A., 2015. N^*C^*-Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame. *International Journal of Mathematical. Combinatorics*, **1**, 1–13.

Şenyurt, S., Çalışkan, A. and Çelik, Ü., 2016. N^*C^*-Smarandache curve of Bertrand curves pair according to Frenet frame. *International Journal of Mathematical. Combinatorics*, **1**, 1-7.

Turgut, M., Yılmaz, S., 2008. Smarandache curves in Minkowski space-time. *International Journal of Mathematical. Combinatorics*, **3**, 51-55.

Uğurlu, H.H., 1997. On the geometry of timelike surfaces. *Communications Faculty of Sciences. University of Ankara Series. A1 Mathematics and Statics*, **46**, 211-223.

Woestijne, V.D.I., 1990. Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski-space. *Proc. Congres Geometrie Differentielle et Applications, Avignon (30 May 1988), Word Scientific Publishing, Geometry and Topology of Submanifolds II,* 344-369.