ÖHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.
ISSN: 2564-6605
doi: 10.28948/ngumuh.632051
Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 8, Sayı 3, (2019), 089-098
Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 8, Issue 3, (2019), 089-098

21. Ulusal Mekanik Kongresi Özel Sayısı
21st National Mechanics Congress Special Issue

Araştırma / Research

ÖZEL BİR BAŞLANGIÇ KOŞULU ALTINDA (N+1) BOYUTLU BENJAMİN- ONO DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ

Ali DEMİRCİ (ORCID: 0000-0001-9780-0132)*

İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Geliş / Received: *11.10.2019*
Kabul / Accepted: *20.11.2019*

ÖZ

Bu çalışmada, paraboloid tipi bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi bir başlangıç koşulu için (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin dispersif şok dalga çözümleri incelenmiştir. Bu amaçla, (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denklemi uygun bir çözüm formu kullanılarak, (1+1) boyutlu değişken katsayılı Benjamin- Ono (nBO) tipi bir denkleme indirgenmiştir. nBO denkleminin dispersif şok dalgası çözümünü betimleyen Whitham modülasyon denklemleri uygun Riemann tipi değişkenler cinsinden türetilmiştir. Türetilen bu modülasyon denklemlerinin sayısal çözümlerinden elde edilen dispersif şok dalgası çözümleriyle, nBO denkleminin doğrudan sayısal çözümleri n=4 boyutu için karşılaştırılmış ve aralarında iyi bir uyumun olduğu görülmüştür. (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin paraboloid tipi bir dalga cephesi boyunca yayılan dispersif şok dalgası çözümünün, indirgenmiş (1+1) boyutlu nBO denkleminin dispersif şok dalgası çözümüyle betimlenebileceği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Dispersif şok dalgaları, Whitham modülasyon teorisi, Benjamin- Ono denklemi

WHITHAM MODULATION THEORY FOR (N+1) DIMENSIONAL BENJAMIN- ONO EQUATION WITH A SPECIAL INITIAL CONDITION

ABSTRACT

Dispersive shock waves (DSWs) in (n+1) dimensional Benjamin–Ono equation (nDBO) is considered using step like initial data along a paraboloid front. Employing a similarity reduction exactly reduces the study of such DSWs in (n + 1) dimensions to finding DSW solutions of (1 + 1) dimensional equations. With this ansatz, the nDBO equation can be exactly reduced to a Benjamin–Ono (nBO) type equation. Whitham modulation equations which describe DSW evolution in the nBO equation are derived and Riemann type variables are introduced. DSWs obtained from the numerical solutions of the corresponding Whitham systems and direct numerical simulations of the nBO equation are compared with very good agreement obtained. It is concluded that the (n+1) DSW behavior along self similar parabolic fronts can be effectively described by the DSW solutions of the reduced (1 + 1) dimensional equations.

Keywords: Dispersive shock waves, Whitham modulation theory, Benjamin- Ono equation

*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: 0212 285 3276; e-mail / e-posta: demircial@itu.edu.tr

1. GİRİŞ

Şok dalgası ortamda meydana gelen ani bir değişimi ifade eder ve genellikle bu dalga tipi yerel dalga hızından daha hızlı hareket eder. Eğer yayılma ortamındaki dispersiyon ve disipasyon etkisi ihmal edilirse, başlangıçta iletilen dalga sinyali kritik bir zaman değerinde kırılmaya uğrar. Fakat fiziksel olarak genellikle bu etkiler ihmal edilemediğinden, çoğu model zayıf dispersiyon ve zayıf disipasyon etkisi içerir. Eğer disipasyon dispersiyona göre daha baskınsa viskoz şok dalgası (VŞD) oluşur. VŞD genellikle akışkanlarda ve sıkışabilir gazlarda görülür. Diğer taraftan, dispersiyon etkisi daha baskınsa dispersif şok dalgası (DŞD) oluşur. DŞD, zayıf dispersiyon ve zayıf nonlineerliğin hakim olduğu sistemlerde meydana gelen fiziksel olarak önemli bir olaydır ve atmosfer olayları, su dalgaları, soğuk plazmalar, süper akışkanlar ve optik gibi alanlarda yapılan birçok gözlemin ve deneyin konusu olmuşlardır.

DŞD, nonlineer ortamda kendiliğinden gelişen, durağan olmayan dalga trenleridir. Ortamın nonlineerliği, dalga cephesinin dikleşmesine ve dolayısı ile 'gradient catastrophe' diye adlandırılan olayın ortaya çıkmasına sebep olur [1]. Eğer VŞD'nın oluştuğu bir yayılma ortamı varsa, dalga dikleşmesinin oluştuğu andan itibaren, dalga yayılımı, dalganın formu aynı kalacak şekilde (zayıf çözüm veya şok dalgası çözümü), devam edecektir. Fakat DŞD'nın oluştuğu bir yayılma ortamı varsa, dalga dikleşmesinin oluştuğu andan itibaren, dispersiyonun etkisiyle yüksek titreşimli bir dalga treni formundaki dalga, yayılımına devam eder. Bu yüksek titreşimli DŞD'sı çözümünü inşasında ilk olarak Whitham tarafından Korteweg-de-Vries (KdV) denkleminde tanımlanan Riemann probleminin çözümü için ortaya konan Whitham modülasyon teorisi kullanılır [2].

Bu teori, DŞD'sının yayılımının, tabiatına uygun şekilde, zamana ve maddesel konuma göre yavaş ve hızlı olarak adlandırılan farklı ölçeklerde değişim gösteren fiziksel büyüklüklerle tanımlandığını kabul eder. Dalga treninin yayılımı hızlı ölçekte gerçekleşirken; dalga sayısı, faz hızı ve genlik gibi fiziksel büyüklüklerdeki değişim DŞD'larında yavaş ölçekte gerçekleşir. Whitham modülasyon denklemleri adı verilen denklemler ise, bu fiziksel büyüklüklerin yavaş değişimini karakterize etmek için türetilmektedir. Whitham modülasyon denklemlerinin çözümleri sayesinde DŞD'larına ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum-minimum genlik büyüklükleri gibi bilgiler elde edilir.

Gerekli matematiksel araçların yetersizliğinden dolayı Whitham modülasyon teorisi son döneme kadar sadece (1+1) boyutlu, (1 maddesel boyut + zaman boyutu) nonlineer kısmi diferansiyel denklem modeller için ortaya konmuştur. Farklı ortamlarda yayılan dispersif dalgaların yayılmasını modelleyen (1+1) boyutlu; Korteweg-de-Vries (KdV) [3], modifiye KdV [4], Nonlineer Schrödinger (NLS) [5], Benjamin- Ono (BO) [6], Gardner [7], vb. denklemleri için DŞD'sının yayılımının incelendiği çalışmalar yapılmıştır. Birden daha fazla maddesel boyuta sahip modeller için DŞD'larının yayılımının incelenmesi ve Whitham Teorisinin uygulanması ise yeni gelişim gösteren bir problem sınıfıdır. [8] çalışmasında parabolik bir cephe boyunca tanımlanan başlangıç koşulu altında Kadomstev- Petviashvili (KP) ve İki Boyutlu Benjamin- Ono (2DBO) denklemleri için DŞD'sı yayılımı problemi incelenmiştir. Daha sonra genel bir başlangıç koşulu altında bu iki denklem için Whitham Modülasyon Teorisi genelleştirilmiştir [9-10]. Ayrıca, [8]'deki yöntem kullanılarak, iki boyutlu NLS denkleminin indirgenmiş hali olan radyal Schrödinger denklemi için de DŞD'sı çözümleri inşa edilmiştir [11]. Bu çalışmalara ek olarak, Bose- Einstein yoğuşmasında ortaya çıkan, yüksek boyutlu diferansiyel denklem modelleriyle tanımlanan DŞD'sı yayılımını inceleyen [12] çalışması verilebilir.

Bu çalışmada ise, daha yüksek boyutlu denklemlerde DŞD'sı yayılımının incelenmesi probleminin ilk örneklerinden biri olarak kabul edilecek, özel bir başlangıç koşulu altında (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminde DŞD'sı çözümlerinin elde edilmesi problemi ele alınacaktır. Buradaki özel başlangıç koşulu, bir paraboloid cephe boyunca tanımlı birim basamak fonksiyonudur. İlk olarak, (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denklemine bir benzerlik dönüşümü uygulayarak, denklem (1+1) boyutlu değişken katsayılı Benjamin- Ono (nBO) denklemine indirgenecektir. Uygulanan dönüşüm sayesinde problem; başlangıç koşulu olarak birim basamak fonksiyonu için nBO denkleminde DŞD'sı yayılımı problemine dönüşmektedir. Dönüşüm yardımıyla elde edilen (1+1) boyutlu nBO denkleminde tanımlı bu başlangıç değer problemine, Whitham modülasyon teorisi uygulanarak, DŞD'sı yayılımını ifade etmek için gerekli olan Whitham modülasyon denklemleri türetilecektir. Bu modülasyon denklemleri, kuazilineer bir kısmi türevli denklem sistemi oluştururlar. Bu sistem öncelikle uygun Riemann tipi değişkenler kullanılarak, daha basit bir forma dönüştürülecektir. Elde edilen Riemann tipi değişkenler cinsinden elde edilen basit formdaki sistem analitik olarak çözülemediği için, başlangıç koşulu olan birim basamak fonksiyonu sağlayan Riemann tipi değişkenlerin başlangıç koşulları altında, uygun sayısal yöntemler kullanılarak çözülecektir. Bu sistemin sayısal çözümleri kullanılarak nBO denkleminin DŞD'sı çözümleri elde edilip, birim basamak fonksiyonu şeklindeki başlangıç koşulu altında nBO denkleminin sayısal çözümleri ile karşılaştırılacaktır. Bu çözümler karşılaştırıldığında, aralarında iyi bir uyumun olduğu görülecek olup, Whitham modülasyon teorisinin ilgili DŞD'sı yayılımının anlaşılmasında başarılı olduğu görülecektir. Ayrıca, nBO denkleminin DŞD'sının çözümlerinin, indirgeme işlemi sırasında dalga cephesinin zamanla değişimini ifade eden ilgili denklemin sabit bir zaman değerindeki çözümünden elde edilen bir değer kadar ötelenmesi ile (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin DŞD'sı çözümleri elde edilebilmektedir. Bu öteleme işlemi sayesinde; (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin, başlangıç verisindeki paraboloidin seçilen sabit bir daire kesiti boyunca yayılan DŞD'sı çözümünün inşası herhangi bir zaman değeri t için yapılabilmektedir.

Çalışma aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde, bir paraboloid dalga cephesi boyunca (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin nBO denklemine indirgenmesi detaylı olarak anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde, indirgenen nBO denkleminde bir pertürbasyon yöntemi kullanarak, nBO denklemi için Whitham teorisinin öngördüğü Whitham modülasyon denklemleri elde edilmiştir. Bu modülasyon denklemleri, uygun Riemann tipi değişkenler kullanılarak, daha basit bir forma indirgenmişlerdir. Dördüncü bölümde, basit forma indirgenmiş modülasyon denklemlerinin gerekli başlangıç koşulu altındaki sayısal çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu sayısal çözümler kullanılarak nBO denkleminin DŞD'sı çözümleri inşa edilmiştir. İnşa edilen bu DŞD'sı çözümleri, nBO denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ile karılaştırılarak, iki çözümün uyuştukları gösterilmiştir. Ayrıca, Whitham teorisi ile elde edilen çözümden yararlanarak, nBO denkleminin DŞD'sı çözümüne ait bazı fiziksel sonuçlara yer verilmiştir. Buna ek olarak, nBO denkleminin DŞD'sı çözümleri kullanılarak (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin bir paraboloid dalga cephesi boyunca yayılan DŞD'sı çözümünün inşa edildiği gösterilmştir. Son bölüm de ise, çalışmada elde edilen sonuçların özetlenmesi ve bu çalışma ile ilişkili olarak gelecekte yapılabilecek araştırmalara dair tartışmalar yapılmıştır.

2. (N+1) BOYUTLU BENJAMIN- ONO DENKLEMİNİN İNDİRGENMESİ

Bu çalışmada , [8]'de ortaya konan yöntem genelleştirilerek (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminde

$$\left(u_t + uu_x + \varepsilon H(u_{xx})\right)_x + \lambda\Delta u = 0, \qquad \Delta := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

dispersif şok dalgasının yayılımı problemi ele alınacaktır. Burada, $u = u(x, \boldsymbol{y}_i, t),\ i = 1,\dots,n-1$ şeklinde bir fonksiyon; $\lambda = \pm 1$ sabit, $|\varepsilon| \ll 1$ zayıf dispersiyon etkisini belirleyen diğer bir sabit; Hu(x) ise

$$Hu(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x' - x} dx', \tag{2}$$

Hilbert Dönüşümü olarak tanımlanırlar. (1) denkleminde görünen alt indisler ilgili değişkenlere göre kısmi türevleri temsil ederken; (1) denklemi çok derin sularda yayılan nonlineer uzun içsel dalgaların yayılımını modelleyen iki boyutlu Benjamin- Ono denkleminin genelleştirilmiş halidir [13].

Ayrıca, bu çalışmada (1) denkleminin, Riemann tipi başlangıç koşulunun n boyutlu haline genişletilmiş özel bir hali olan aşağıdaki başlangıç koşulu için çözümü inşa edilecektir:

$$u(\eta, 0) = \begin{cases} 1, & \eta < 0; \\ 0, & \eta \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Burada, $\eta = x + \frac{1}{2} P(\boldsymbol{y}_i, 0)$.

(1) denkleminin, (3) tipi başlangıç koşulu altında ortaya çıkan DŞD'sı çözümleri; özel olarak seçilen paraboloid tipi başlangıç dalga cephesi

$$P(\boldsymbol{y}_i, 0) = c(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2), \quad c \text{ reel bir sabit}, \tag{4}$$

boyunca, (1) denkleminin bir indirgemesi kullanılarak elde edilecektir. Bu indirgemenin yapılabilmesi için (1) denkleminin

$$u = f(x + P(\boldsymbol{y}_i, t)/2, t) \tag{5}$$

çözüm formuna sahip olduğunu kabul edelim. (5) çözüm formu, (1) denkleminde kullanılırsa,

$$\left(\frac{1}{2} f_\eta P_t + f_t + f f_\eta + \varepsilon H(f_{\eta\eta})\right)_\eta + \lambda\left(\frac{1}{4} f_{\eta\eta} \sum_{i=1}^{n-1} \left(P_{y_i}\right)^2 + \frac{1}{2} f_\eta \sum_{i=1}^{n-1} P_{y_i y_i}\right) = 0 \tag{6}$$

denklemi elde edilir. Burada, $\eta := x + P(\boldsymbol{y}_i, t)$ olarak tanımlanır. Ayrıca, (1) denklemi için sonsuzda

$$\eta \to -\infty \quad için \quad u \to R(t) \quad ve \quad \eta \to \infty \quad için \quad u \to 0$$

sınır koşullarının sağlandığı kabul edilsin. Buradaki, $R(t)$ fonksiyonu daha sonra belirlenecektir.

Bu sınır koşulları altında, $P_{y_i y_i}$ fonksiyonlarının y_i değişkenlerinden bağımsız olduğu kabul edilirse, (6) denklemindeki f_η teriminin katsayısı sadece t değişkenine bağlı olur. Ek olarak, (6) denklemindeki $f_{\eta\eta}$ terimlerinin katsayı toplamlarının sıfır olduğu kabul edilirse, P ve f fonksiyonları aşağıdaki denklem sistemini sağlarlar:

$$P_t + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(P_{y_i}\right)^2 = 0, \qquad (7a)$$

$$f_t + f f_\eta + \varepsilon H\left(f_{\eta\eta}\right) + \frac{\lambda}{2} f \sum_{i=1}^{n-1} P_{y_i y_i} = 0. \qquad (7b)$$

(7a) denklemi dalga cephesinin zamanda evrimini karakterize ederken, (7b) denklemi DŞD'sı yayılımının η ekseni doğrultusundaki yayılımını karakterize etmektedir. (7a) denkleminin (4) başlangıç koşulu altındaki çözümü karakteristikler metodu kullanılarak

$$P(\boldsymbol{y}_i, t) = \frac{c(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2)}{1 + 2c\lambda t}$$

(8)

şeklinde bulunur ve $P_{y_i y_i}$ fonksiyonlarının y_i değişkenlerinden bağımsız olması kabulüne de doğrulamaktadır. Daha sonra (8) çözümü de (7b) denkleminde kullanılırsa, Benjamin-Ono tipi aşağıdaki denklem elde edilir:

$$f_t + f f_\eta + \varepsilon H(f_{\eta\eta}) + \frac{\lambda c(n-1)}{1+2\lambda c t} f = 0, \quad (nBO).$$

(9)

Özet olarak, (5) çözüm formu kullanılarak, (n+1) boyutlu (1) denklemi, (4) ile verilmiş paraboloid tipi başlangıç dalga cephesi için (1+1) boyutlu değişken katsayılı bir kısmı türevli denkleme (KTD) (9) indirgenmiştir. Benzer bir indirgeme KTD'ler için benzerlik dönüşümleri kullanılarak da elde edilebilir [14]. $n = 2$ için (9) denklemi [8]'de elde edilen silindirik Benjamin-Ono (sBO) denkleminin aynısıdır.

$t_0 = \dfrac{1}{(n-1)\lambda c}$ olarak tanımlanırsa, $\dfrac{\lambda c(n-1)}{1+2\lambda c t}$ terimi,

$$h(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{2}{n-1}t},$$

halini alır. Bu çalışmada sadece $\lambda = 1$ durumu için analiz yapılacak olup, $\lambda = -1$ durumu için sonuçlar $c \to -c$ dönüşümü yapılarak da elde edilebilir. (9) denklemi ile ilişkilendirilecek sınır koşullarını elde etmek için, (9) denklemindeki η değişkenine bağlı terimleri ihmal edip, geriye kalan adi diferansiyel denklem, Riemann tipi başlangıç koşulunu (3) da sağlayacak şekilde $R(0) = 1$ olarak seçilen başlangıç koşulu için çözülürse, $R(t)$ fonksiyonu

$$R(t) = \left(\frac{t_0}{t_0 + \frac{2}{n-1}t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \qquad (10)$$

şeklinde belirlenir.

Bir sonraki kısımda (3) tipindeki başlangıç koşulu altında, (9) (nBO) denkleminin DŞD'sı çözümleri inşa edilecektir.

3. nBO DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ

Bu kısımda, nBO denkleminin dispersif şok dalgası çözümleri Whitham modülasyon teorisi kullanılarak incelenecektir. Bu teoride nBO denklemi için üç tane korunum yasası elde edilecektir. Daha sonra bu korunum yasaları uygun Riemann tipi değişkenler kullanarak, Whitham sistemi adı verilen kuazilineer birinci mertebe kısmi türevli denklem sistemine dönüştürülecektir. Bu yaklaşım ilk olarak Whitham tarafından KdV denklemi özelinde kullanılmıştır [2]. KdV gibi integrallenebilir denklemler için türetilen Whitham sistemleri diagonal hale dönüştürülüp, tam olarak çözülebilirler.

Fakat bildiğimiz kadarıyla nBO denkleminin integrallenebilirliği konusunda bir bilgi bulunmamaktadır. Bu nedenle nBO denklemi için Whitham sistemi türetilirken, ilk olarak Luke tarafından Klein- Gordon denklemiyle ilgili Whitham sisteminin türetilmesinde kullanılan çoklu ölçekler yöntemi kullanılacaktır [15]. Bu yöntemin kullanılmasının başlıca nedeni, orijinal Whitham Teorisinde gerekli olan, ilgili denklemlere ait korunum yasalarının nBO denklemi için bilinmemesidir. İndirgenen nBO denklemine ait korunum tipi denklemler yapacağımız asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu uygulanarak elde edilecek sekülerlik koşullardan türetilecektir. Bu amaçla ilk olarak nBO denklemi için elde edilecek birinci mertebe pertürbasyon probleminin periyodik ilerleyen dalga çözümü elde edilecektir. Bu periyodik çözüm yavaş değişen üç tane serbest parametre içermektedir. Ayrıca, bu periyodik çözüm hızlı değişen ve dalgaların korunum yasası adı verilen bir uygunluk koşuluna tabi olan faz değişkenine de bağlıdır. Dalgaların korunum yasasına ek olarak, ikinci mertebe pertürbasyon probleminden elde edilecek iki sekülerlik koşuluyla birlikte periyodik çözümdeki üç serbest parametre için gerekli olan korunum tipi üç adet denklem elde edilecektir.

Bu amaçla, ilk olarak $f = f(\theta,\eta,t;\varepsilon)$ formunda olduğunu kabul edelim. Burada, θ, hızlı değişen faz değişkeni olmak üzere, aşağıdaki bağıntılar yardımıyla tanımlanır:

$$\theta_\eta = \frac{k(\eta,t)}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega(\eta,t)}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon}.$$

(11)

Bu tanımda görünen yavaş değişkenler η ve t'ye bağlı olarak değişen k,ω ve V sırasıyla dalga sayısı, frekans ve faz hızı olarak adlandırılırlar. Bu tanımın geçerli olabilmesi için, $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ kısmı türev bağıntısının sağlanmasından elde edilen

$$k_t + (kV)_\eta = 0$$

(12)

denklemi sağlanmalıdır. (12) denklemi dalgaların korunumu olarak adlandırılır ve gerekli olan ilk modülasyon denklemidir.

Daha sonra, f fonksiyonu ε'nun kuvvetleri cinsinden seriye açılır.

$$f(\theta,\eta,t) = f_0(\theta,\eta,t) + \varepsilon f_1(\theta,\eta,t) + \ldots \quad (13)$$

Ardından, çoklu ölçekler metodunun olağan uygulaması olarak, (9) denklemi hızlı ve yavaş değişkenler cinsinden dönüştürülüp, (13) seri açılımı bu dönüştürülmüş denklemde yerine konup, terimler ε'nun kuvvetleri cinsinden gruplanırsa, birinci ve ikinci mertebe pertürbasyon problemleri sırasıyla,

$$\Theta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \quad -\omega f_{0,\theta} + k f_0 f_{0,\theta} + k^2 H\left(f_{0,\theta\theta}\right) = 0, \quad (14)$$

ve

$$\Theta(1): \quad L_H f_1 \equiv -\omega f_{1,\theta} + k(f_0 f_1)_\theta + k^2 H\left(f_{1,\theta\theta}\right) = G \quad (15)$$

şeklinde elde edilirler. Burada, (15) denkleminin sağ tarafındaki G terimi,

$$G \equiv -\left[f_{0,t} + f_0 f_{0,\eta} + H\left(k_\eta f_{0,\theta} + 2k f_{0,\theta\eta}\right) + h(t) f_0\right] \quad (16)$$

olarak tanımlanır. (14) denkleminin çözümü θ_0 bir sabit olmak üzere

$$f_0 = \frac{4k^2}{\sqrt{A^2 + 4k^2} - A\cos(\theta - \theta_0)} + \beta \quad (17)$$

olarak bulunur. (19) çözümü, ayrıca klasik BO denkleminin periyodik dalga çözümü olarak da bilinir [16]. Burada, $A = \frac{1}{2}(f_{0,\max} - f_{0,\min})$ dalgaların genliği olarak tanımlanırken, dalgaların faz hızı

$V = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4k^2} + \beta$ şeklinde ifade edilir. (17) çözümündeki k, A, β ve V ,yavaş değişkenler η ve t 'ye bağlı fonksiyonlardır. nBO denklemi için k, V ve β 'ya bağlı şekilde modülasyon denklemleri türetilecektir.

(17) çözümü (16) denkleminde kullanılırsa, denklemin sağ tarafında θ 'ya bağlı bir sekülerlik oluşmaktadır. w; (15) denkleminin homojen kısmının kendine eş probleminin çözümü olmak üzere,

$$L_H^A w = 0, \quad L_H^A = \omega\partial_\theta - kf_0\partial_\theta - k^2 H(\partial_{\theta\theta}) \tag{18}$$

denklemini sağlar. Seküler terimi ortadan kaldırmak için, (15) denkleminden elde edilen

$$\int_0^{2\pi} [wL_H f_1 - f_1 L_H^A w] d\theta = \int_0^{2\pi} wG d\theta \tag{19}$$

bağıntısı kullanılacaktır. (18) probleminin çözümleri olan $w = 1$ ve $w = f_0$ fonksiyonlarını sırasıyla (19) bağıntısında yerine koyup, f_0 'ın θ 'ya göre periyodik olması da kullanılarak ilgili integraller hesaplanırsa, gerekli olan diğer iki modülasyon denklemi aşağıdaki şekilde bulunurlar:

$$\beta_t + \beta\beta_\eta + h(t)(2k + \beta) = 0, \tag{20}$$

$$V_t + VV_\eta + kk_\eta + h(t)(2V - \beta) = 0. \tag{21}$$

(12) denklemiyle birlikte (20) ve (21) denklemleri k, V ve β 'nın belirlenebilmesi için gerekli olan modülasyon denklem sistemini (Whitham sistemi) oluştururlar. Bu denklemlerde $h(t)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfır alındığında, indirgenen sistem klasik BO denkleminin Whitham sistemidir [17].

Whitham sistemini daha sade hale getirmek için uygun Riemann tipi değişkenler

$$k = b - a, \quad V = b + a, \quad \beta = 2c \tag{22}$$

kullanılıp [17], Whitham sistemi dönüştürülürse aşağıdaki kuazilineer kısmı türevli denklem (KTD) sistemi elde edilir:

$$a_t + 2aa_\eta + h(t)(a + b - c) = 0, \tag{23}$$

$$b_t + 2bb_\eta + h(t)(a + b - c) = 0, \tag{24}$$

$$c_t + 2cc_\eta + h(t)(b + c - a) = 0. \tag{25}$$

Buna ek olarak, (22) Riemann tipi değişkenler cinsinden (17) birinci mertebe problemin çözümü;

$$f_0 = \frac{2(b - a)^2}{(b + a - 2c) - 2\sqrt{(a - c)(b - c)}\cos(\theta - \theta_0)} + 2c \tag{26}$$

halini alır. Ayrıca, hızlı değişen faz terimi θ, (11) denklemi integre edilerek bulunur:

$$\theta(\eta, t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(x', t)}{\varepsilon} dx' - \int_0^t \frac{k(\eta, t')V(\eta, t')}{\varepsilon} dt'. \tag{27}$$

(17) çözümünde θ_0 sabiti bulunmakta olup, bu sabitin değeri nBO denkleminin sayısal çözümünün, (17) çözümüyle karşılaştırılmasıyla bulunacaktır.

İlgili başlangıç koşullarıyla birlikte (23-25) Whitham sisteminin çözümü, (27) faz terimi ile birlikte, (27) çözümünün inşasında kullanılır. Klasik BO denkleminin Whitham sistemi diagonal formda olup, tam çözümü benzerlik değişkeni η / t cinsinden seyreltme dalga çözümü olarak elde edilir [17]. Fakat (23-25) Whitham sistemi diagonal formda olmadığı için ve analitik olarak çözülemediğinden dolayı, bu sistem sayısal yöntemler kullanılarak çözülecektir.

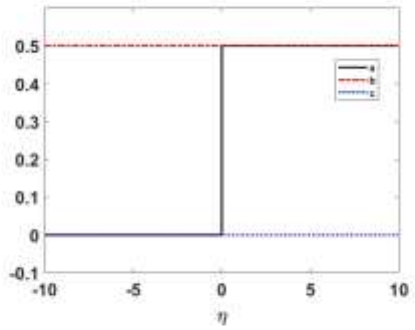
4. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda, özel olarak seçilen boyut değeri n=4 için, Whitham sisteminin ilgili başlangıç koşulları altında hesaplanan sayısal çözümleriyle elde edilen asimptotik çözümle, nB0 denkleminin (3) başlangıç koşulu altında elde edilen sayısal çözümleri karılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma ile nB0 denkleminin (3)'de verilen başlangıç koşulu altında ortaya çıkan DŞD'sının yapısını anlamak için Whitham Teorisinin ne kadar başarılı olduğu görülecektir.

Bu amaçla ilk olarak Whitham sistemi için başlangıç koşulları tanımlanmalıdır. nB0 denkleminin (3) basamak tipi başlangıç koşulu altında çözümünü aradığımız için, (3) koşulunu a, b ve c Riemann tipi değişkenler cinsinden inşa edecek başlangıç koşulları belirlenmelidir. Aynı zamanda Whitham sistemi için de başlangıç koşulları olacak bu fonksiyonlar basamak tipinde

$$a(\eta,0)=\begin{cases}0, & \eta\le 0;\\ 1/2, & \eta>0,\end{cases}\qquad b(\eta,0)=\frac{1}{2},\qquad c(\eta,0)=0, \tag{28}$$

olarak belirlenirler. Bu başlangıç koşullarının grafikleri Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Riemann tipi değişkenler için (28) başlangıç koşulları.

Klasik BO denklemine ait Whitham sistemi için Riemann değişkenlerinin sağlaması gereken sınır koşulları başlangıç koşullarının sınırdaki değerleri olarak sabitlenmişlerdir. Fakat, orijinal problemimiz olan (n+1) boyutlu BO denkleminin sağlaması gereken sınır koşulları $R(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak değişken olduğu için, nBO denklemine ait Whitham sistemi için geçerli olan sınır koşulları da zamana bağlı olarak belirlenmelidir. Bu koşullar, (23-25) sistemindeki denklemlerin η maddesel değişkenine bağlılığı düşürülerek elde edilen zamana bağlı diferansiyel denklemlerin (28) başlangıç koşulu altında sol sınır ve sağ sınır uç için ayrı ayrı olarak çözülmesiyle elde edilirler. Bu işlem yapılırsa, sınır koşulları; problemin η tanım kümesinin sol ve sağ uçlarında sırasıyla,

$$a_- = \frac{1}{2}[R(t)-1],\quad b_- = \frac{R(t)}{2},\quad c_- = \frac{1}{2}[R(t)-1],$$

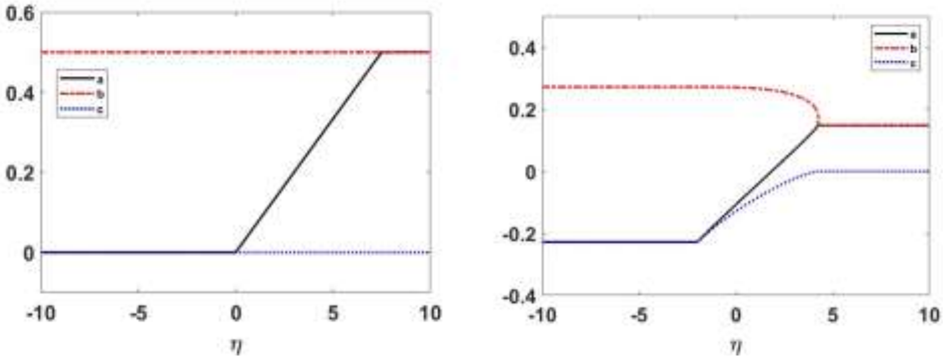
(29a)

$$a_+ = b_+ = \frac{R^2(t)}{2},\quad c_+ = 0$$

(29b)

olarak bulunurlar.

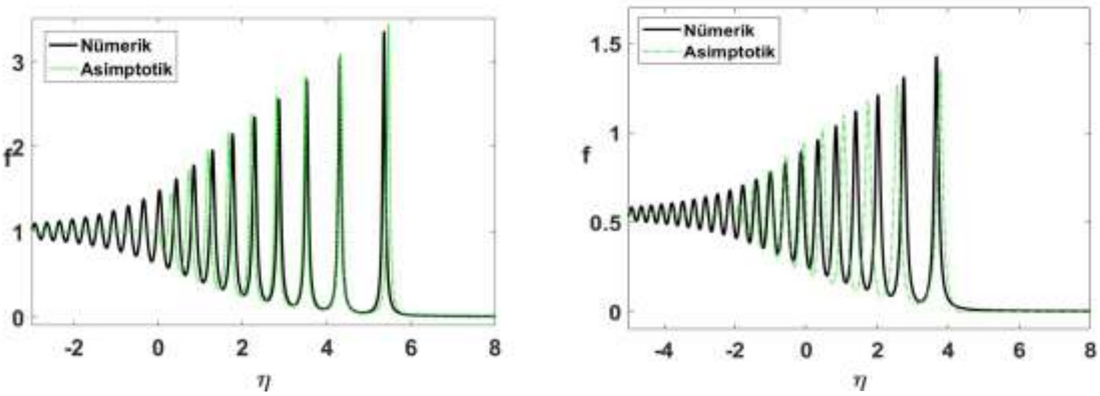
(23-25) Whitham sisteminin, (28) başlangıç koşulları ve (29) sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerinin bulunmasında, Shampine [18] tarafından birinci mertebe hiperbolik KTD'ler için geliştirilmiş MATLAB tabanlı bir çözücü kullanılmıştır. Hesaplamalar yapılırken, iki basamaklı Lax- Wendrof yönteminin farklı bir türü seçilmiştir. [19]. Sayısal çözümde, η için [-30, 30] tanım kümesinde $N = 2^{15}$ nokta kullanılırken, zaman ayrıklaştırma aralığı olarak da maddesel ayrıklaştırma aralığının 0.9 katı alınmıştır. Çözümlerin grafikleri t=7.5'da klasik BO ve nBO denklemleri için Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Sol panelde BO denklemi, sağ panelde nBO denklemi için t=7.5'da Whitham sistemlerinin çözümleri.

$\varepsilon = 10^{-(3/2)}$, $t_0 = 10$ olarak alınmışlardır.

BO ve nBO denklemlerinin basamak tipi başlangıç koşulu (3) altında ve ilgili sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerini elde etmek içinse, önce nBO denklemi uygun bir teknikle Fourier uzayında dönüştürülüp, elde edilen adi diferansiyel denklem ETDRK4 (Exponential Time Differencing Fourth Order Runge- Kutta) [20- 21] yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin uygulanmasındaki ayrıntılar için [8] çalışmasına bakılabilir. Yöntemin uygulanmasında yine maddesel koordinat için [-30,30] tanım kümesi seçilirken, bu koordinat için $N = 2^{15}$ adet Fourier modu alınmıştır. Zaman ayrıklaştırma aralığı olarak da 10^{-4} değeri seçilerek elde edilen çözümlerin, Whitham sisteminin sayısal çözümlerinden elde edilen (27) çözümünün karşılaştırmaları yapılmıştır. Sonuçlar t=7.5 değerinde BO ve nBO denklemleri için Şekil 3'de verilmişlerdir.



Şekil 3. (3) başlangıç koşulu için; sol panelde BO denklemi, sağ panelde nBO denklemi için t=7.5'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerin karşılaştırılması.

$\varepsilon = 10^{-(3/2)}$, $t_0 = 10$ olarak alınmışlardır.

Asimptotik çözümlerin elde edilirken gerekli olan θ_0'ların belirlenmesi için doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen sol taraflardaki seviye değeriyle sağ taraftaki en büyük dalga katarının genlik değerinin ortalaması alınmıştır. Asimptotik çözümde bu ortalama değerine en yakın genliğe sahip ortadaki dalga katarına göre θ_0 değeri belirlenmiştir. BO denklemi için ortalama değer (3.387+1)/2=2.194 iken, ortadaki dalga katarının genliği 2.127 olmuştur. nBO denklemi içinse bu değerler sırasıyla 0.9492 ve 0.9389 olarak elde edilmişlerdir.

Şekil 3'den görüleceği üzere asimptotik çözümlerden elde edilen dalga sayısı ve genlik sonuçları doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen çözümlerle tutarlıdır. Fakat dalga katarlarının konumları arasında küçük bir farklılık görülmektedir. Bunun nedeni ise θ_0 değerini ancak yaklaşık olarak belirleyebilmemizdir. Diğer bir gözlemse, BO durumu için DŞD'nın en büyük genliğe sahip dalga katarının t=7.5'daki ortalama hızı V_{avg} =0.831'dir. Bu hız BO denkleminin $4V_{avg}$ =3.34 genlikli cebirsel yalnız (solitary) dalga çözümünün faz hızının yaklaşık değeridir [22]. nBO durumu için DŞD'sının en büyük genliğe sahip dalga katarının t=7.5'daki ortalama hızı V_{avg}=0.4889'dır. Bu değer BO durumundaki değerden oldukça düşüktür. Bunun sebebi ise en büyük genlikli dalga katarının genliğinin nBO durumunda zamanla küçülmesidir. Bu durumu ve nBO denklemi için DŞD'sının genel hatlarını [23]'de verilen animasyondan ayrıntılı bir şekilde görülebilmektedir.

n=4 boyutu için nBO denklemi kapsamında verdiğimiz tüm sonuçlar farklı n boyut değerleri için de tekrarlanabilir.

nBO denkleminin DŞD'sı çözümleri, (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin çözümleriyle sadece $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{n-1}^2 = 0$ 'da çakışmaktadır. (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin herhangi bir dairesel kesitindeki çözümü, (7a) denkleminin seçilen zaman değeri t ve dairesel kesit $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{n-1}^2 = r^2$ için elde edilen çözümünden bulunan değer kadar nBO denkleminin çözümünün ötelenmesi ile bulunur. Bu öteleme, sabit bir zaman değeri t^s için, $x = \eta - h(t^s)r$ öteleme değişkeniyle yapılır. Burada, r seçilen daire kesitinin sabit yarıçapıdır. Bu öteleme işlemiyle, başlangıç paraboloidi üzerinde seçilen herhangi bir dairesel kesit için (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin DŞD'sı çözümü herhangi bir zaman değeri t için bulunabilir.

5. SONUÇLAR

Paraboloid tipi bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi bir başlangıç koşulu için (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminin dispersif şok dalga çözümleri incelenmiştir. İnceleme yapılırken, özel bir çözüm formu kullanılarak bu problem basamak tipi başlangıç koşulu altında (1+1) boyutlu değişken katsayılı nBO denkleminde DŞD'sı çözümlerinin elde edilmesi problemine indirgenmiştir. İndirgenen probleme Whitham teorisi uygulanarak elde edilen asimptotik çözümün geçerliliği, nBO denkleminin basamak tipi başlangıç koşulu için elde edilen sayısal çözümleriyle karşılaştırılmış, bu iki çözüm arasında tutarlılığın oluştuğu gözlenmiştir. Whitham teorisinin uygulanması ile elde edilen sonuçlar her boyut değeri için geçerlidir. Hesaplamalar ve karşılaştırmalar sadece n=4 için yapılmışlardır.

Bu çalışmada kullanılan yöntemler, diğer (n+1) boyutlu dispersif kısmi türevli denklemlerde tanımlanacak dispersif şok dalgası yayılımı problemlerine de uygulanabilir. Özellikle değişik uygulama alanlarında düşük boyutlu hallerinin türetildiği, (n+1) boyutlu Kadomtsev- Petviashvili, modifiye Kadomtsev- Petviashvili ve Kadomtsev- Petviashvili- Gardner denklemlerinde DŞD'sı yayılımının incelenmesi problemleri sonraki dönemde ele alınacak problemler olarak düşünülmektedir.

Bu çalışma, (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminde özel bir başlangıç koşulu altında oluşan DŞD'sına ait sonuçları elde etmek için yapılmıştır. Genel bir başlangıç koşulu için (n+1) boyutlu Benjamin- Ono denkleminde oluşan DŞD'larının incelenmesi için iki boyutlu BO denklemi özelinde [10] çalışmasında kullanılan yöntemin geliştirilmesi gerekmektedir. Açık olan bu problem, gelecekteki bir araştırmanın konusu olabilir.

KAYNAKLAR

[1] WHITHAM, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, USA, 1974.

[2] WHITHAM, G.B., "Non-linear Dispersive Waves", Proceedings of The Royal Society Series A Mathematical Physics, 283, 238-261, 1965.

[3] GUREVICH, A., PITAEVSKII, L., "Nonstationary Structure of a Collisionless Shock Wave", Zhurnal Eksperimentalnoi Teoreticheskoi Fiziki, 65, 590-604, 1973.

[4] DRISCOLL, C., O'NEIL, T., "Modulational Instability of Cnoidal Wave Solutions of the Modified Korteweg–de Vries Equation", Journal of Mathematical Physics, 17(7), 1196-1200, 1976.

[5] GUREVICH, A., KRYLOV, A., "Dissipitionless Shock Waves in Media With Positive Dispersion", Eksperimentalnoi Teoreticheskoi Fiziki, 92, 1684-1699, 1987.

[6] MATSUNO, Y., "Nonlinear Modulation of Periodic Waves in the Small Dispersion Limit of The Benjamin-
Ono Equation, Physical Review E, 6, 7934- 7939, 1998.

[7] KAMCHATNOV, A.M., KUO, Y.H., LIN, T.C., HORNG, T.L., GOU, S.C., EL, G.A., GRIMSHAW, R.H.J., "Undular Bore Theory For The Gardner Equation", Physical Review E, 86, 036605, 2012.

[8] ABLOWITZ, M.J., DEMİRCİ, A., MA, Y.P., "Dispersive Shock Waves in The Kadomtsev- Petviashvili And Two Dimensional Benjamin- Ono Equations", Physica D, 333, 84-98, 2016.

[9] ABLOWITZ, M.J., BIONDINI G., WANG, Q., "Whitham Modulation Theory For The Kadomtsev-

Petviashvili Equation", Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 473, 20160695, 2017.

[10] ABLOWITZ, M.J., BIONDINI G., WANG, Q., "Whitham Modulation Theory For The Two Dimensional Benjamin- Ono Equation", Physical Review E, 96(3), 032225, (2017).

[11] ABLOWITZ, M.J., COLE, J.T., RUMANOV, I., "On The Whitham System For The Radial Schrödinger Equation", Studied in Applied Mathematics, 142(3), 269-313, 2019.

[12] HOEFER, M., ILAN, B., "Theory of Two- Dimensional Oblique Dispersive Shock Waves in Supersonic Flow of a Superfluid", Physical Review A, 80(6), 061601, 2009.

[13] ABLOWITZ, M.J., SEGUR, H., "Long Internal Waves in Fluids of Great Depth", Studies in Applied Mathematics, 62, 249-262, 1980.

[14] CONDE, J.M., GÜNGÖR, F., "Analysis of The Symmetry Group And Exact Solutions of The Dispersionless KP Equation in N+1 Dimensions", Journal of Mathematical Physics, 59(11), 111501, 2018.

[15] LUKE, J.C., "A Perturbation Method For Nonlinear Dispersive Wave Problems", Proceedings of Royal Society A, 292, 403-412, 1966.

[16] BENJAMIN, T.B., "Internal Waves of Permanent Form in fluids of Great Depth", Journal of Fluid Mechanics, 29(3), 559-592, 1966.

[17] MATSUNO, Y., SHCHESNOVICH, V.S., KAMCHATNOV, A.M., KRAENKEL, R.A., "Whitham Method For The Benjamin- Ono- Burgers Equation And Dispersive Shock", Physical Review E, 75, 016307, 2007.

[18] SHAMPINE, L.F., "Solving Hyperbolic PDEs in MATLAB", Applied Numerical Analysis And Computational Mathematics, 2(3), 346-358, 2005.

[19] ENGQUIST, B., LÖTSTEDT, P., SJÖGREEN, B., "Nonlinear Filters For Efficient Shock Computation", Mathematics of Computation, 52, 509-537, 1989.

[20] COX, S.M., MATTHEWS, P.C., "Exponential Time Differencing For Stiff Systems", Journal of Computational Physics, 176, 430-455, 2002.

[21] KASSAM, A.K., TREFETHEN, L.N., "Fourth- Order Time Stepping For Stiff PDEs", SIAM Journal On Scientific Computing, 26(4), 1214-1233, 2005.

[22] ONO, H., "Algebraic Solitary Waves in Stratified Fluids", Journal of Physical Society of Japan, 39, 1082, 1975.

[23] http://youtu.be/5aHmjx1yewk, "N=4 İçin nBO Denkleminde t=0 ve t=15 Arasındaki Dispersif Şok Dalgası Yayılımının Simülasyonu", (erişim tarihi: 13.07.2019).