Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **22** (2022) 011303 (85-91) AKU J. Sci. Eng. **22** (2022) 011303 (85-91)

DOI: 10.35414/akufemubid.1023095

Araştırma Makalesi / Research Article

Lineer Olmayan Kübik-Kuintik Schrödinger Denkleminin Üstel -Φ(ξ) Yöntemiyle Tam Çözümleri

Melike KAPLAN[1]

[1] *Kastamonu Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Kastamonu.*

e-posta: mkaplan@kastamonu.edu.tr ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-5700-9127

Geliş Tarihi: 13.11.2021 Kabul Tarihi: 15.02.2022

Anahtar kelimeler
Kübik-Kuintik Schrödinger Denklemi; Üstel -Φ(ξ) Yöntemi; Tam Çözümler; Sembolik Hesaplama

Öz

Bu çalışmada, lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin yeni tam çözümleri, üstel -Φ(ξ) yöntemiyle elde edilmiştir. Bu denklem, lineer olmayan optikte ve matematiksel fizikte büyük bir öneme sahiptir. Üstel -Φ(ξ) yöntemi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler ve kesir mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerin farklı tipte analitik çözümlerini bulmada kullanılan oldukça elverişli ve kullanışlı bir metottur. Bu çalışmada yapılan hesaplamalarda ve çözümlerin doğruluğunun teyit edilmesinde Maple paket programı kullanılmıştır.

Exact Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation With Anti Cubic Nonlinearity by the exp(-Φ(ξ)) Method

Keywords
Nonlinear Schrödinger Equation with Anti Cubic Nonlinearity; Exp(-Φ(ξ)) Method; Exact Solutions, Symbolic Computation

Abstract

This work is devoted to obtain exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation with anti cubic nonlinearity by method. This equation plays a crucial role in nonlinear optics and mathematical physics. The method is an efficient and useful method to find different types of analytical solutions of nonlinear partial differential equations and fractional differential equations. We have used the Maple packet program for the calculations and verification of the solutions for this work.

1. Giriş

Mühendislik ve uygulamalı matematikte karşılaşılan birçok problem lineer olmayan oluşum denklemleri kullanılarak modellenmektedir. Bu denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesi, denklemlerin modelledikleri olayların dinamiklerini anlamada büyük bir önem arz ettiğinden popüler bir çalışma alanıdır. Bu çözümlerin elde edilebilmesi için bilim insanları çeşitli yöntemler geliştirmişlerdir. Bunlardan bazıları, ters saçılım metodu Ablowitz ve Segur (1981), homojen denge yöntemi Wang (1995), Wronskian yöntemi Ma vd. (2011), Backlund dönüşüm yöntemi Lü vd. (2012), Hirota bilineer yöntem Wazwaz (2007), Lie grup analizi Biswas ve Khalique (2011), tanh açılım yöntemi Wazwaz (2004), genişletilmiş tanh açılım yöntemi Fan (2000), ansatz yöntemi Ali vd. (2015), sinüs-kosinüs yöntemi Alquran (2012), F-açılım yöntemi Abdou (2008), üstel fonksiyon yöntemi He and Abdou (2007), yardımcı denklem yöntemi Adem ve Khalique (2016), (G′/G)-açılım yöntemi Islam vd. (2015), (G′/G,1/G)-açılım yöntemi Inan vd. (2015), trial denklem yöntemi Mirzazadeh vd. (2015), sine Gordon açılım yöntemi Kumar vd. (2017), dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon yöntemi Ma ve Lee (2009), modifiye edilmiş basit denklem yöntemi Akter ve Akbar (2015), üstel rasyonel fonksiyon yöntemi Kumar ve Kaplan (2018), modifiye edilmiş açılım fonksiyon yöntemi Ismael vd. (2020), modifiye edilmiş üstel -ϕ(ξ) yöntemi Baskonus vd. (2016), Yel ve Baskonus (2019) olarak sıralanabilir.

Bu yöntemlerin her biri farklı avantajlar barındırmaktadır. Bilim insanları, her geçen gün literatüre yeni yöntemler kazandırmakta ve konu güncelliğini korumaktadır.

Üstel -Φ(ξ) yöntemi, lineer olmayan oluşum denklemlerinin farklı tipteki çözümlerini elde etmede kullanılan yeni ve elverişli bir yöntemdir. (G'/G)-açılım yöntemine göre bu tekniğin üstünlüğü, keyfi ek parametreler kullanarak yeni hareketli dalga çözümleri vermesidir. (Kaabar *et al*. 2021).

Bu yöntemin farklı bir versiyonu olan modifiye edilmiş üstel -ϕ(ξ) yöntemi üzerine çalışmalar Baskonus vd. (2016) ve Yel ve Baskonus (2019) yapılmıştır.

Bu makalenin ilerleyen bölümlerinde yer alacak kısımlar şu şekilde özetlenebilir: Bölüm2 de üstel -Φ(ξ) yöntemi adım adım anlatılacaktır. Bölüm3 de, tanıtılan bu yöntemin lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denklemine uygulanması ve elde edilen sonuçlar verilecektir. Son olarak, tartışma ve sonuç bölümü yer almaktadır.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde üstel -ϕ(ξ) yöntemi adım adım tanıtılacaktır. Bunun için ilk olarak, x ve bağımsız değişkenler, u bağımlı değişken olmak üzere,

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \tag{1}$$

formunda bir kısmi diferensiyel denklemi ele alalım. Bu denklemin çözümlerini üstel -ϕ(ξ) yöntemi ile elde etmek için izlenecek adımlar şu şekilde verilebilir:

Adım 1. c dalga hızı olmak üzere,

$$\xi = \mathrm{x} - \mathrm{ct}, \mathrm{u(x,t)} = \mathrm{U}(\xi), \tag{2}$$

hareketli dalga dönüşümünün uygulanmasıyla, (1) numaralı denklem aşağıda verilen adi diferensiyel denkleme indirgenir.

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0. \tag{3}$$

Burada, (′), ξ a göre türevi göstermektedir. (2) denklemi ξ değişkenine göre mümkün olduğu kadar integre edilmelidir.

Adım 2. Üstel -Φ(ξ) yöntemine göre, (2) numaralı denklemin tam çözümleri

$$U(\xi) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\mathrm{n}\Phi(\xi)} \tag{4}$$

formunda aranacaktır. Burada, a_n,n=0,1,...,N(a_N≠0) ler daha sonradan hesaplanması gereken sabitler ve Φ(ξ) aşağıdaki yardımcı diferensiyel denklemin çözümüdür.

$$\Phi'(\xi) = e^{-\Phi(\xi)} + \mu e^{\Phi(\xi)} + \lambda \tag{5}$$

Bu diferensiyel denklemin genel çözümlerinden aşağıdaki durumlar elde edilir.

Durum 1 (Hiperbolik fonksiyon çözümleri):

$\lambda^2-4\mu>0$ ve $\mu\neq0$ iken,

$$\Phi_1(\xi) = ln\left(\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+\mathrm{C})\right)-\lambda}{2\mu}\right) \tag{6}$$

Durum 2 (Trigonometrik fonksiyon çözümleri):

$\lambda^2-4\mu<0$ ve $\mu\neq0$ iken,

$$\Phi_2(\xi) = ln\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+\mathrm{C})\right)-\lambda}{2\mu}\right) \tag{7}$$

Durum 3 (Trigonometrik fonksiyon çözümleri):

$\lambda^2-4\mu>0$, $\mu=0$ ve $\lambda\neq0$ iken,

$$\Phi_3(\xi) = -\,ln\left(\frac{\lambda}{\cosh(\lambda(\xi+\mathrm{C}))+\sinh(\lambda(\xi+\mathrm{C}))-1}\right) \tag{8}$$

Durum 4 (Rasyonel fonksiyon çözümleri):

$\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda\neq0$ ve $\mu\neq0$ iken,

$$\Phi_4(\xi) = ln\left(-\frac{2(\lambda(\xi+\mathrm{C})+2)}{\lambda^2(\xi+\mathrm{C})}\right) \tag{9}$$

Durum 5:

$\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda=0$ ve $\mu=0$ iken,

$$\Phi_5(\xi) = ln(\xi+\mathrm{C}) \tag{10}$$

Burada C integrasyon sabitidir ve N homojen denge prensibine göre belirlenecek olan dengelenme sayısıdır. Daha açık bir deyişle, (2) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle belirlenir.

Adım 3. (4) potansiyel çözümünün (5) yardımcı denklemiyle birlikte (3) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilen ifadenin $e^{-\Phi(\xi)}$ nin kuvvetlerine göre düzenlenmesiyle $e^{-\Phi(\xi)}$ nin bir polinomu elde edilir. Bu polinonum her bir katsayısının sıfıra eşitlenmesiyle , a_n,(n=0,1,...,N),c, λ ve μ terimlerinin bir polinomu elde edilir .

Adım 4. Adım 3 de elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple yardımıyla çözülüp elde edilen katsayıların (4) çözümünde yerine yazılmasıyla ve (5) denkleminin çözümlerinin kullanılmasıyla, (1) denkleminin hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel tipten tam çözümleri elde edilir (Roshid et al. 2014).

3. Bulgular

Bu bölümde lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümleri elde edilcektir. Bu denklem ilk olarak 2003 yılında, a, b_1, b_2 ve b_3 reel değerli sabitler olmak üzere,

$$iq_t + aq_{xx} + (b_1|q|^{-4} + b_2|q|^2 + b_3|q|^4)q = 0 \qquad (11)$$

biçiminde verilmiştir (Biswas and Konar, 2006). Zayed vd. (2019) Hamiltonyen pertürbasyon terimlerinin varlığında denkleme birkaç matematiksel teknik uyguladı. Biswas vd. (2018) denklemin rezonans optik solitonlarını buldu. (11) numaralı denklemde b_1=0 ise, daha önce kapsamlı bir şekilde incelenen parabolik yasa ya da kübik beşli lineer olmama yasası ile lineer olmayan Schrödinger denklemine indirgenir.

τ, ω, ε_0 ve x_0 reel sabitler olmak üzere,

$$q(x,t) = e^{i\theta(x,t)}u(\xi),\ \theta=-\tau x+\omega t+\varepsilon_0,\ \xi=x-lt+x_0 \qquad (12)$$

dönüşümünün (11) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilen ifade reel ve imajiner kısım olmak üzere iki kısma ayrılırsa, imajiner kısımdan:

$$l = -2\tau a, \qquad (13)$$

bağıntısı elde edilir. Reel kısımdan ise,

$$u''(\xi) - \frac{\omega+a\tau^2}{a}u(\xi) + \frac{b_1}{a}u^{-3}(\xi) + \frac{b_2}{a}u^3(\xi) + \frac{b_3}{a}u^5(\xi) = 0 \qquad (14)$$

denklemin her iki tarafının u' ile çarpılıp ξ ye göre integre edilmesiyle

$$\frac{(u')^2}{2} - \frac{\omega+a\tau^2}{2a}u^2 - \frac{b_1}{2a}u^{-2} + \frac{b_2}{4a}u^4 + \frac{b_3}{6a}u^6 + b_4 = 0 \qquad (15)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$(u')^2 - c_0u^2 - c_1u^{-2} + c_2\frac{u^4}{2} + c_3\frac{u^6}{3} + c_4 = 0 \qquad (16)$$

bulunur. Burada

$$c_0 = \frac{\omega+a\tau^2}{2a},\ c_1 = \frac{b_1}{a},\ c_2 = \frac{b_2}{a},\ c_3 = \frac{b_3}{a},\ c_4 = 2b_4 \qquad (17)$$

dır.

$u^2 = v$ alırsak

$$u' = \frac{1}{2u}v', \qquad (18)$$

$$v'^2 - 4c_0v^2 - 4c_1 + 2c_2v^3 + \frac{4}{3}c_3v^4 + 4c_4v = 0, \qquad (19)$$

denklemini elde ederiz.

3.1 Üstel yönteminin uygulaması

Homojen denge prensibine göre, dengelenme sayısı 1 olarak bulunur. Böylelikle çözüm,

$$v(\xi) = a_0 + a_1e^{-\Phi(\xi)} \qquad (20)$$

biçiminde aranacaktır. (20) numaralı çözümün (19) denkleminde yerine yazılması, elde edilen ifadenin $e^{\Phi(\xi)}$ nin kuvvetlerine göre düzenlenmesi ve $e^{\Phi(\xi)}$ nin kuvvetlerinin sırasıyla sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$-4c_0{a_0}^2 + 2c_2{a_0}^3 - 4c_1 + \frac{4}{3}c_3{a_0}^4 + 4c_4a_0 + {a_1}^2\mu^2 = 0,$$

$$-8c_0a_0a_1 + 6c_2{a_0}^2a_1 + 2{a_1}^2\mu\lambda + \frac{16}{3}c_3{a_0}^3a_1 + 4c_4a_1 = 0,$$

$$8c_3{a_0}^2{a_1}^2 + {a_1}^2\lambda^2 - 4c_0{a_1}^2 + 2{a_1}^2 + 6c_2a_0{a_1}^2 = 0,$$

$$2{a_1}^2\lambda + \frac{16}{3}c_3a_0{a_1}^3 + 2c_2{a_1}^3 = 0,$$

$${a_1}^2 + \frac{4}{3}c_3{a_1}^4 = 0. \qquad (22)$$

Bu cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle aşağıdaki durumlar elde edilir:

Durum 1:

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{-2c_4}{\mu\lambda} \tag{23}$$

ve

$$c_0 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\mu}{2}, c_1 = \frac{{c_4}^2}{\lambda^2}, c_2 = \frac{\mu\lambda^2}{2c_4}, c_3 = -\frac{3\mu^2\lambda^2}{16{c_4}^2} \tag{24}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu değerler ile beş farklı durum ortaya çıkacaktır:

Durum 1.1 (Hiperbolik fonksiyon çözümleri):
λ^2-4 μ >0, ve $\mu \neq 0$ iken,

$$u_{1,1}(\xi) = 2\sqrt{\frac{c_4}{\lambda\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}(\xi+C)}{2}\right)-\lambda\right)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{25}$$

olarak bulunur.
Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü

$$q_{1,1}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)}u_{1,1}(x,t) \tag{26}$$

biçiminde elde edilir.

Durum 1.2 (Trigonometrik fonksiyon çözümleri):
λ^2-4 μ <0 ve $\mu \neq 0$ iken,

$$u_{1,2}(\xi) = 2\sqrt{\frac{-c_4}{\lambda\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}(\xi+C)}{2}\right)-\lambda\right)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{27}$$

olarak bulunur.
Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{1,2}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)}u_{1,2}(x,t) \tag{28}$$

biçiminde elde edilir.

Durum 1.3 (Trigonometrik fonksiyon çözümleri):
λ^2-4 μ >0, $\lambda \neq 0$ ve $\mu = 0$ iken

$$u_{1,3}(\xi) = \sqrt{-\frac{2c_4}{\mu(\cosh(\lambda(\xi+C))+\sinh(\lambda(\xi+C))-1)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{29}$$

olarak bulunur.
Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{1,3}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)}u_{1,3}(x,t) \tag{30}$$

biçiminde elde edilir.

Durum 1.4 (Rasyonel fonksiyon çözümleri):
λ^2-4μ=0, $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ iken,

$$u_{1,4}(\xi) = \sqrt{\frac{2\lambda c_4(\xi+C)}{\mu(2\lambda(\xi+C)+4)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{31}$$

olarak bulunur.
Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{1,4}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)}u_{1,4}(x,t) \tag{32}$$

olarak edilir.

Durum 1.5 :
λ^2-4μ=0, λ=0 ve μ=0 iken,

$$u_{1,5}(\xi) = \sqrt{\frac{2\lambda c_4}{\mu\lambda(\xi+C)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{33}$$

olarak bulunur.
Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{1,5}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)} u_{1,5}(x,t) \tag{34}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = \frac{6c_4}{3\lambda^2+4\mu},\ a_1 = \frac{6c_4\sqrt{-3\,\mu}}{\mu(3\lambda^2+4\mu)}, \tag{35}$$

ve

$$c_0 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda\sqrt{-3\,\mu}}{2},$$

$$c_1 = -\frac{3{c_4}^2\left(4\mu + 4\lambda\sqrt{-3\,\mu} - 3\lambda^2\right)}{(3\lambda^2+4\mu)^2},$$

$$c_2 = \frac{\left(-2\mu+\lambda\sqrt{-3\,\mu}\right)(3\lambda^2+4\mu)}{18c_4},$$

$$c_3 = \frac{(3\lambda^2+4\mu)^2\mu}{144{c_4}^2} \tag{36}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu değerler ile beş farklı durum ortaya çıkacaktır:

Durum 2.1 (Hiperbolik fonksiyon çözümleri):
λ^2-4 μ >0 ve $\mu \neq 0$ iken,

$$u_{2,1}(\xi) = \sqrt{\frac{6c_4}{3\lambda^2+4\mu} + \frac{12c_4\sqrt{-3\,\mu}}{-(3\lambda^2+4\mu)\left(\sqrt{\lambda^2-4\,\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\,\mu}}{2}(\xi+C)\right)+\lambda\right)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{37}$$

olarak bulunur.

Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{2,1}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)} u_{2,1}(x,t) \tag{38}$$

biçiminde elde edilir.

Durum 2.2 (Trigonometrik fonksiyon çözümleri):
λ^2-4 μ <0 ve $\mu \neq 0$ iken,

$$u_{2,2}(\xi) = \sqrt{\frac{6c_4}{3\lambda^2+4\mu} + \frac{12c_4\sqrt{-3\,\mu}}{(3\lambda^2+4\mu)\left(\sqrt{4\,\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\,\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+C)\right)-\lambda\right)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{39}$$

olarak bulunur.

Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{2,2}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)} u_{2,2}(x,t) \tag{40}$$

biçiminde elde edilir.

Durum 2.3 (Trigonometrik fonksiyon çözümleri):
λ^2-4 μ >0, $\mu = 0$ ve $\lambda \neq 0$ iken,

$$u_{2,3}(\xi) = \sqrt{\frac{6c_4}{3\lambda^2+4\mu} + \frac{6\lambda c_4\sqrt{-3\,\mu}}{\mu(3\lambda^2+4\mu)\left(\cosh(\lambda(\xi+C))+\sinh(\lambda(\xi+C))-1\right)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{41}$$

olarak bulunur.

Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{2,3}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)} u_{2,3}(x,t) \tag{42}$$

biçiminde elde edilir.

Durum 2.4 (Rasyonel fonksiyon çözümleri):

λ^2-4 μ=0, $\mu \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ iken,

$$u_{2,4}(\xi) = \sqrt{\frac{6c_4}{3\lambda^2+4\mu} - \frac{3c_4\lambda^2\sqrt{-3\,\mu}(\xi+C)}{\mu(3\lambda^2+4\mu)(\lambda(\xi+C)+2)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \tag{43}$$

olarak bulunur.

Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{2,4}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)} u_{2,4}(x,t) \quad (44)$$

Durum 2. 5:

λ^2-4 μ=0, $\mu = 0$ ve λ =0 iken,

$$u_{2,5}(\xi) = \sqrt{\frac{6c_4}{3\lambda^2+4\mu} + \frac{6c_4\sqrt{-3\,\mu}}{\mu(3\lambda^2+4\mu)(\xi+C)}} + C_1,$$

$$\xi = x + 2\tau a t + x_0 \quad (45)$$

olarak bulunur.

Bu durumda lineer olmayan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümü,

$$q_{2,5}(x,t) = e^{i(-\tau x+\omega t+\varepsilon_0)} u_{2,5}(x,t) \quad (46)$$

biçiminde elde edilir.

Bu çalışmada elde edilen çözümler, literatürde var olanlardan farklıdır (Jawad, et. Al, 2017, Kaplan, vd. 2018).

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, lineer olmayan Schrödinger denkleminin özel bir hali olan kübik-kuintik Schrödinger denkleminin tam çözümleri, yeni ve etkili bir teknik olan, üstel (-Φ(ξ)) yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Bu makalede bulunan tam çözümler, denklemin yeni hareketli dalga çözümleridir. Üstel -Φ(ξ)) yöntemi, ele alınan denklemlerin farklı tipten çözümlerinin elde edilmesini sağlaması açısından diğer yöntemlere kıyasla üstünlükleri bulunan bir yöntemdir. Bu makalede yapılan hesaplamalarda Maple paket programı kullanılmıştır.

İlerleyen çalışmalarda, ilgili yöntem farklı denklem ve denklem sistemlerine de uygulanacaktır. Ayrıca ilgili yöntemin farklı bir versiyonu olan modifiye edilmiş üstel -Φ(ξ)) yöntemi ilgili denkleme uygulanarak, elde edilen çözümler kıyaslanabilir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, denklemin modellediği fiziksel olaylara kaynaklık etme açısından matematiksel fizik ve diğer uygulamalı alanlarda kullanışlı olacağı düşünülmektedir.

5. Kaynaklar

Abdou, M.A. 2008. Further improved F-expansion and new exact solutions for nonlinear evolution equations. *Nonlinear Dynamics,* **52**, 277-288.

Ablowitz, M.J. and Segur, H., 1981. Solitons and Inverse Scattering Transformation, **4**, SIAM, Philadelphia, 1-84.

Adem, A.R. and Khalique, C.M., 2016. Conserved quantities and solutions of a (2+1)-dimensional Haragus-Courcelle-Il'ichev model. *Computers and Mathematics with Applications,* **71**, 1129-1136.

Akter, J. and Akbar, M.A., 2015. Exact solutions to the Benney-Luke equation and the Phi-4 equations by using modified simple equation method. *Results in Physics*, **5**, 125-130.

Ali, S. , Rizvia and S.T.R., Younis, M., 2015. Traveling wave solutions for nonlinear dispersive water-wave systems with time-dependent coefficients. *Nonlinear Dynamics,* **82**, 1755-1762.

Alquran, M.T. 2012. Solitons and periodic solutions to nonlinear partial differential equations by the sine-cosine method. *Appl. Math. Inf. Sci.,* **6(1)**, 85-88.

Baskonus, H.M., Bulut, H., and Atangana, A. 2016. On the complex hyperbolic structures of the longitudinal wave equation in a magneto-electro-elastic circular rod. *Smart Material and Structures,* 25, 035022.

Biswas, A., Jawad, A.J.M. and Zhou, Q., 2018. Resonant optical solitons with anti-cubic nonlinearity. *Optik,* **157**, 525-531.

Biswas, A. and Khalique, C.M., 2011. Stationary solutions for nonlinear dispersive Schrödinger's equation. *Nonlinear Dynamics,* **63**, 623-626.

Biswas, A. and Konar, S., 2006. Introduction to non-Kerr law optical solitons, **1**, CRC Press, Boca Raton FL, 27-54.

Biswas, A. and Khalique, C.M., 2011. Stationary solutions for nonlinear dispersive Schrödinger's equation. *Nonlinear Dynamics,* **63**, 623-626.

Fan, E., 2000. Extented tanh-function method and its applications to nonlinear equations. Physics Letters A, **277**, 212-218.

He, J.H. and Abdou, M.A., 2007. New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method. *Chaos, Solitons and Fractals,* **34**, 1421-1429.

Inan, I.E., Ugurlu, Y. and Inc, M., 2015. New Applications of the (G′/G,1/G)-Expansion Method. *Acta Physica Polonica* A, **128(3)**, 245-251.

Islam, Md. S., Khan, K. and Akbar, M.A., 2015. An analytical method for finding exact solutions of modified Korteweg-de Vries equation. *Results in Physics,* **5**, 131-135.

Ismael, H.F., Bulut, H., Baskonus, H.M., Gao, W. 2020. Newly modified method and its application to thr coupled Boussinesq equation in ocean engineering with its linear stability analysis. *Communications in Theoritical Physics*, **72 (11)**, 115002.

Jawad, A.J., Mirzazadeh, M., Zhou, Q. and Biswas, A., 2017. Optical solitons with anti-cubic nonlinearity using three integration schemes. *Superlattices and Microstructures,* **105**, 1-10.

Kaabar, M.K.A., Kaplan, M. and Siri, Z., 2021. New Exact Soliton Solutions of the (3+1)-Dimensional Conformable Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony Equation via Two Novel Techniques. *Journal of Function Spaces*, 465990.

Kaplan, M., Hosseini, K., Samadani, F., Raza, N. 2018. Optical soliton solutions of the cubic-quintic non-linear Schrödinger's equation including an anti-cubic term. *Journal of Modern Optics*, **65(12)** 1431-1436.

Kumar, D. and Kaplan, M., 2018. New analytical solutions of (2+1)-dimensional conformable time fractional Zoomeron equation via two distinct techniques. *Chinese Journal of Physics*, **56 (5)**, 2173-2185.

Kumar, D., Hosseini, and K., Samadani, F., 2017. The sine-Gordon expansion method to look for the traveling wave solutions of the Tzitzéica type equations in nonlinear optics. *Optik,* **149**, 439-446.

Lü, X., Tian, B., Zhang, H-Q., Xu, T. and Li, H., 2012. Generalized (2+1)-dimensional Gardner model: bilinear equations, Bäcklund transformation, Lax representation and interaction mechanisms. *Nonlinear Dynamics,* **67**, 2279-2290.

Ma, W.X., Abdeljabbar, A. and Asaad, M.G., 2011. Wronskian and Grammian solutions to a (3+1)-dimensional generalized KP equation. *Applied Mathematics and Computation,* **217**, 10016-10023.

Ma, W.X.A and Lee, J.H., 2009. A transformed rational function method and exact solutions to the 3+1 dimensional Jimbo-Miwa equation. *Chaos, Solitons and Fractals,* **42**, 1356-1363.

Mirzazadeh, M., Arnous, A.H., Mahmood, M.F., Zerrad, E. and Biswas, A., 2015. Soliton solutions to resonant nonlinear Schrödinger's equation with time-dependent coefficients by trial solution approach. *Nonlinear Dynamics,* **81**, 277-282.

Roshid, H.O., Kabir, R.C., Bhowmik, R.C. and Datta, B.K., 2014. Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and exp(-Φ(ξ)) method. *SpringerPlus,* **3**, 692.

Wang, M.L., 1995. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. *Physics Letters A,* **199**, 169-172.

Wazwaz, A.M. 2007. Multiple-soliton solutions for the Boussinesq equation. *Applied Mathematics and Computation,* **192 (2)**, 479-486.

Wazwaz, A.M.2004. The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation,* **154 (3)** ,713-723.

Yel, G. Baskonus, H.M. 2019. Solitons in conformable time-fractional Wu-Zhang system arising in coastal design. *Pramana* **92**, 57.

Zayed, E.M.E., Alngar, M.E.M. and Al-Nowehy, A.G., 2019. On solving the nonlinear Schrödinger equation with an anti-cubic nonlinearity in presence of Hamiltonian perturbation terms. *Optik,* **178** 488-508.