GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi/Research Article

Cilt/Volume : 10
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2021
Sayfa/Pages:209-216

Alınış tarihi(Received): 07.12.2021
Kabul tarihi (Accepted): 31.12.2021

Sıçrama Şartlarına Sahip Çok-Aralıklı Bir Süreksiz Sınır Değer Probleminin Operatör-Demeti Yöntemi ile İncelenmesi Üzerine

Hayati OLĞAR[1,*]

[1] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü / Tokat .*
**Sorumlu Yazar:hayati.olgar@gop.edu.tr*

ÖZET: Bu çalışmanın temel amacı, bir süreksizlik noktasında geçiş şartlarına sahip iki aralıklı süreksiz sınır-değer-geçiş probleminin ürettiği ikinci mertebeden diferensiyel operatörlerin bazı spektral özelliklerinin incelenmesidir. Spektrumun davranışlarının ve özfonksiyonlar sisteminin özelliklerinin araştırılması için bir operatör-teorik yöntem tanıtılmıştır. Bunun için ilk önce çok aralıklı sınır-değer-geçiş problemimize özgü olan yeni uzaylar ve bu uzaylara özgü iç çarpımlar tanımlanmıştır. Araştırdığımız sıçrama şartlı sınır-değer-geçiş problemi Sobolev uzaylarının direkt toplam uzayında integral denkleme indirgenmiş ve bu problemimizin genelleştirilmiş çözüm kavramı tanımlanmıştır. İki aralıklı süreksiz sınır-değer-geçiş probleminin Riesz temsil teoremi yardımıyla bir operatör-demeti denklemine indirgenebileceğini göz önünde bulundurarak uygun Sobolev uzaylarında bazı kendine eşlenik ve kompakt operatörler tanımlanmıştır. Daha sonra bu operatör-polinomun pozitif tanımlı olduğu ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler– *Çok-aralıklı sınır-değer problemleri, genelleştirilmiş çözümler, sıçrama şartları, operatör demeti.*

On Examination of a Multi-Interval Discontinuous Boundary Value Problem with Jump Conditions by the Operator-Pencil Method

ABSTRACT: The main purpose of this study is to examine some spectral properties of second-order differential operators produced by the two-interval discontinuous boundary-value-transmission problem, which has jump conditions at a discontinuity point. An operator-theoretic method is introduced to investigate the behavior of the spectrum and the properties of the system of eigenfunctions. For this, firstly, new spaces and inner products specific to these spaces, which are specific to our multi-interval boundary value-transmission problem, are defined. The investigated boundary-value-transmission problem is reduced to an integral equation in the direct sum of Sobolev spaces and the generalized solution concept for this problem is defined. We showed that the considered two-interval discontinuous boundary-value-transmission problem can be reduced to an operator-pencil equation. With the help of the Riesz representation theorem, some self-adjoint and compact operators are defined in suitable Sobolev spaces. Finally, we proved that this operator-polynomial is positive defined.

Keywords– *Multi-interval boundary-value problems, generalized solutions, jump conditions, operator-pencil.*

1. Giriş

Ayrık [-1,0) ve (0,1] aralıkları üzerinde

$$-f_1''(x,\lambda)+q_1(x)\,f_1(x,\lambda)=\lambda f_1(x,\lambda)\ ,\ -1<x<0, \tag{1}$$

$$-f_2''(x,\lambda)+q_2(x)\,f_2(x,\lambda)=\lambda f_2(x,\lambda)\ ,\ 0<x<1, \tag{2}$$

şeklinde tanımlı Sturm-Liouville denklemlerinden, $x=-1$ ve $x=1$ uç noktalarında verilmiş

$$\cos\alpha\, f_1(-1,\lambda) + \sin\alpha\, f_1'(-1,\lambda)=0 \tag{3}$$

$$\cos\beta\, f_2(1,\lambda) + \sin\beta\, f_2'(1,\lambda) \quad =0 \tag{4}$$

sınır şartlarından ve $x=0$ süreksizlik noktasında verilmiş

$$f_1(-0,\lambda) - f_2(+0,\lambda) =0 \tag{5}$$

$$f_1'(-0,\lambda) - f_2'(+0,\lambda)=a_1 f_1(-0,\lambda) + a_2 f_2(+0,\lambda) \tag{6}$$

geçiş şartlarından oluşan Sturm-Liouville tipindeki bir sınır değer geçiş problemini gözönüne alalım. Burada λ kompleks spektral parametre, $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ fonksiyonları sırasıyla $\Omega_1:=[-1,0]$ ve $\Omega_2:=[0,1]$ aralıkları üzerinde reel-değerli sürekli fonksiyonlar ve $q_1(x)>0$, $q_2(x)>0$, a_1, a_2 reel değerli katsayılardır, $\alpha\in[0,2\pi)$.

Diğer adıyla değişkenlerine ayırma yöntemi olarak da bilinen Fourier yönteminin uygulanması sonucunda birçok problem ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır-değer problemine dönüştürülür. Ancak Fourier yönteminin esaslandırılması için elde edilen sınır-değer probleminin özfonksiyonlarının baz oluşturması ya da en azından, özfonksiyonların ve bu fonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların tam olması gösterilmelidir. Matematiksel-fiziğin birçok probleminin çözümünde Fourier yöntemi kullanılmaktadır. Verilmiş fonksiyonu ikinci mertebeden Sturm-Liouville denklemi için sınır-değer probleminin özfonksiyonları cinsinden açılımı şeklinde ifade etmek, Fourier yönteminin uygulanabilmesiyle mümkün olmaktadır. Yani ikinci mertebeden Sturm-Liouville denklemi için sınır-değer probleminin özfonksiyonlarının hangi fonksiyon uzayında baz oluşturduğunun incelenmesini gerektirmektedir. Mevcut bu durum beraberinde; özdeğerlerin asimptotik ifadelerinin bulunması, Green fonksiyonunun açılımının bulunması ve incelenmesi, rezolvent operatörünün bulunması, özfonksiyonlar sisteminin ve spektrumun asimptotik davranışlarının incelenmesi, uygun özfonksiyonlar sisteminin tamlık özelliklerinin araştırılması için bir operatör-teorik yöntemin geliştirilmesi, genelleştirilmiş özfonksiyonlarının tanımlanması ve bu özfonksiyonların uygun Hilbert uzayında Riesz bazı oluşturması gibi özelliklerinin incelenmesi ve normunun değerlendirilmesi v.b. gibi bir kaç problemin incelenmesini gerektirir (Kandemir ve Mukhtarov, 2018; Muhtarov, 1994; Mukhtarov ve ark. 2015, 2018; Mukhtarov ve Aydemir, 2020; Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Yakubov ve Yakubov, 1999). 1973' de yayımlanan çalışmasında Walter, hem denkleminde hem de sınır şartlarının her ikisinde özdeğer parametresi bulunduran ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin uygun Hilbert uzayında kendine eşlenik lineer operatörlerle bağlantısını kurmuş ve bu tip problemlerin operatör teorik yorumunu vermiştir. Fulton, 1977 yılında yayımladığı çalışmada, bu tipten problemlerin araştırılmasında Titchmarsh' ın 1962 yılında yayımlanmış kitabındaki klasik yöntemlerin de uygulanabileceğini göstermiştir. Süreksizlik noktasına sahip ve sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz katsayılı sınır-değer-geçiş problemleri üzerine son zamanlarda yapılan çalışmaların sayısı giderek artmaktadır (Akcay, 2021; Allahverdiev ve Tuna, 2021; Bairamov ve ark., 2019, Binding ve ark., 1993; Muhtarov, 1994; Mukhtarov ve ark., 2018; Mukhtarov ve Aydemir, 2021; Şen ve Stikonas, 2021). Ladyzhenskaia 1985 yayımlamış olduğu çalışmasında bir Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözümler kavramı yardımıyla, özdeğer probleminin bir operatör-demet denkleme indirgenmesine olanak sağlamıştır. Belinskiy ve Dauer, 1997 yılındaki çalışmalarında sınır şartlarının sadece bir tanesinde özdeğer parametresi bulunduran bir sınır-değer problemini incelemişlerdir. Bu çalışmada ayrıca Hilbert uzayında bu sınıftan problemlerin özfonksiyonlarının Riesz bazı oluşturduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, sıçrama koşulları ve spektral parametreye bağlı sınır koşulları altında parçalı sürekli potansiyele sahip iki ayrık aralıkta tanımlanmış çok aralıklı bir Sturm-Liouville denkleminden oluşan çok aralıklı bir Sturm Liouville problemini araştırmaktır. Sıçrama koşulları ile ilgili problemler, modern teknolojinin, mühendisliğin, fiziğin ihtiyaçları nedeniyle son yıllarda önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir. Çok-aralıklı Sturm Liouville problemleri kendi başlarına ilginç olmanın yanı sıra, bilim ve teknolojinin çeşitli alanlarında sayısız uygulama bulmuştur. Bu problemlerin son zamanlarda literatürde çeşitli alanlarla bağlantılı olarak ele alındığı gözlemlenmiştir. (Örneğin; ısı transferi (Belinskiy ve ark., 2015), sicim teorisi (Gwak ve ark., 2016), akışkanlar dinamiği (Kaoullas ve Georgiou, 2015), biyoloji (Kawano ve Morassi, 2019), matematiksel finans (Nie ve Linetsky, 2019) ve kuantum hesaplama (Parra Rodriguez ve ark., 2018)). Sınır değer geçiş problemlerinin incelenmesinde karşılaşılan matematiksel problemlerin çoğu, sınır-değer probleminin standart çerçevesi içinde klasik yöntemlerle çözülemez. Doğal olarak, tamamlayıcı sıçrama koşullara sahip çok-aralıklı Sturm-Liouville problemlerinin çözümü, klasik Sturm-Liouville problemlerinden çok daha karmaşıktır.

2. Probleme Uygun Hilbert Uzayların Kurulması ve Zayıf Çözüm Kavramı

Çeşitli tipten sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin araştırılmasında standart $L_2(\Omega)$ ve $W_2^k(\Omega)$ Hilbert uzayları önemli bir rol oynamaktadır. Ω, reel sayılar kümesinin herhangi bir sınırlı alt aralığı olsun. $L_2(\Omega)$ ile Ω aralığında karesi integrallenebilir kompleks değerli fonksiyonların klasik Lebesgue uzayını göstereceğiz. Bu uzayda tanımlı iç çarpımı ve karşılık gelen normu sırasıyla

$$\langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)}=\int_{\Omega} f(x)\overline{g}(x)dx \;\; ve \;\; \|f\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\langle f,f\rangle_{L_2(\Omega)}} \tag{7}$$

eşitlikleri ile tanımlayacağız.

$W_2^m(\Omega)$ ile Ω aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir olan ve $g'(x), g''(x),..., g^{(m)}(x)$ genelleştirilmiş türevleri bulunan ve her $k=1,2,...,m$ için $g^{(k)}\in L_2(\Omega)$ olan fonksiyonlarından oluşan Sobolev uzayını göstereceğiz. Bu uzay üzerinde tanımlı iç çarpı

$$\langle f,g\rangle_{W_2^m(\Omega)}=\sum_{k=0}^{m}\left\langle f^{(k)},g^{(k)}\right\rangle_{L_2(\Omega)} \tag{8}$$

eşitliği ile tanımlayacağız $\left(W_2^0(\Omega):=L_2(\Omega)\right)$.

Bu çalışmada aşağıdaki gösterimlerden istifade edeceğiz. $\Omega_1=[-1,0)$, $\Omega_2=(0,1]$ ve $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$,

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)\ ,\ x\in\Omega_1 \\ f_2(x)\ ,\ x\in\Omega_2 \end{cases}\ ,\quad g(x)=\begin{cases} g_1(x)\ ,\ x\in\Omega_1 \\ g_2(x)\ ,\ x\in\Omega_2 \end{cases}\ ,\quad q(x)=\begin{cases} q_1(x)\ ,\ x\in\Omega_1 \\ q_2(x)\ ,\ x\in\Omega_2 \end{cases}\ .$$

$L_2(\Omega)$ ve $W_2^k(\Omega)$ uzaylarından ve yukarıdaki gösterimlerden yararlanarak $(1)-(6)$ sınır-değer-geçiş problemine uygun $\oplus L_2(\Omega)=L_2(\Omega_1)\oplus L_2(\Omega_2)$, $W_2^1(\Omega)=W_2^1(\Omega_1)\oplus W_2^1(\Omega_2)$ ve $W_{2,q}^1(\Omega)=W_{2,q}^1(\Omega_1)\oplus W_{2,q}^1(\Omega_2)$ Hilbert uzaylarının direkt toplamlarında tanımlı olan iç çarpımları ve bu iç çarpımlara karşılık gelen normları sırası ile aşağıdaki şekilde tanımlayacağız.

$$\langle f,g\rangle_{\oplus L_2(\Omega)}=\int_{\Omega_1} f_1(x)\overline{g_1}(x)dx+\int_{\Omega_2} f_2(x)\overline{g_2}(x)dx \tag{9}$$

$$\langle f,g\rangle_{\oplus W_2^1(\Omega)}=\int_{\Omega_1}\left\{f_1(x)\overline{g_1}(x)+f_1'(x)\overline{g_1'}(x)\right\}dx+\int_{\Omega_2}\left\{f_2(x)\overline{g_2}(x)+f_2'(x)\overline{g_2'}(x)\right\}dx \tag{10}$$

$$\langle f,g\rangle_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}=\int_{\Omega_1}\left\{q_1(x)f_1(x)\overline{g_1}(x)+f_1'(x)\overline{g_1'}(x)\right\}dx+\int_{\Omega_2}\left\{q_2(x)f_2(x)\overline{g_2}(x)+f_2'(x)\overline{g_2'}(x)\right\}dx \tag{11}$$

$$\|f\|_{\oplus L_2(\Omega)}=\sqrt{\langle f,f\rangle_{\oplus L_2(\Omega)}}\ ,\ \|f\|_{\oplus W_2^1(\Omega)}=\sqrt{\langle f,f\rangle_{\oplus W_2^1(\Omega)}}\ ,\ \|f\|_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}=\sqrt{\langle f,f\rangle_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}} \tag{12}$$

Teorem 1. $\|f\|_{\oplus W_2^1(\Omega)}$ ve $\|f\|_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}$ normları denktir. Yani, $0<m<M$ olacak biçimde öyle m ve M sayıları mevcuttur ki, $\forall f\in\oplus W_2^1(\Omega)$ için

$$m\,\|f\|_{\oplus W_2^1(\Omega)}<\|f\|_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}<M\,\|f\|_{\oplus W_2^1(\Omega)} \tag{13}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ fonksiyonları pozitif ve sınırlı olduğu için ispat açıktır.

Keyfi $\kappa\in\oplus W_2^1(\Omega)$ fonksiyonunu alalım ve $\overline{\kappa}$ fonksiyonu da κ fonksiyonunun kompleks eşleneği olsun. $(1)-(2)$ diferensiyel denklemlerinin her iki tarafını $\overline{\kappa}$ eşlenik fonksiyonu ile çarparak $\Omega_i\,(i=1,2)$ aralıklarında integrallerini aldıktan sonra $(3)-(6)$ sınır-geçiş şartlarını uygulayıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\langle f,\kappa\rangle_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}-\cot\alpha\, f_1(-1)\overline{\kappa_1}(-1)+\cot\beta\, f_2(1)\overline{\kappa_2}(1)+a_1 f_1(-0)\overline{\kappa_2}(+0)+a_2 f_2(+0)\overline{\kappa_2}(+0)$$
$$=\lambda\langle f,\kappa\rangle_{\oplus L_2(\Omega)} \tag{14}$$

eşitliğini elde ederiz.

Tanım 2. $f(x)\in\oplus W_2^1(\Omega)$ elemanı verilsin. Eğer (14) denklemi $\forall\kappa\in\oplus W_2^1(\Omega)$ için sağlanıyorsa $f(x)\in\oplus W_2^1(\Omega)$ fonksiyonu $(1)-(6)$ sınır-değer-geçiş probleminin genelleştirilmiş çözümü olarak adlandırılır.

Teorem 3. $(1)-(6)$ sınır-değer-geçiş probleminin her klasik $f\in\oplus W_2^2(\Omega)$ çözümü aynı zamanda bir genelleştirilmiş çözümdür.

Not : Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

3. Esas Sonuçlar

Çalışmamızda aşağıdaki temsillerden yararlanacağız:

$$\ell_1(u,\eta) := -\cot\alpha\, f_1(-1)\overline{\kappa_1}(-1) + \cot\beta\, f_2(1)\overline{\kappa_2}(1) + a_1 f_1(-0)\overline{\kappa_2}(+0) + a_2 f_2(+0)\overline{\kappa_2}(+0) \qquad (15)$$

$$\ell_2(u,\eta) := \langle f, \kappa \rangle_{\oplus L_2(\Omega)} \qquad (16)$$

$(15)-(16)$ lineer fonksiyonellerini, Riesz temsil teoreminden yararlanmak suretiyle

$$\ell_i(f,\kappa) := \langle L_i f, \kappa \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} \; (i=1,2) \qquad (17)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $L_i : \oplus W_2^1(\Omega) \to \oplus W_2^1(\Omega)\ (i=1,2)$ operatörleri biçiminde tanımlayabiliriz.

Teorem 4. $\ell_1(f,\kappa) := \langle L_1 f, \kappa \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)}$ eşitliği ile tanımlı L_1 operatörü $\oplus W_2^1(\Omega)$ Hilbert uzayında kendine eşlenik ve kompakt operatördür.

Teorem 5. $\ell_2(f,\kappa) := \langle L_2 f, \kappa \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)}$ eşitliği ile tanımlı L_2 operatörü $\oplus W_2^1(\Omega)$ Hilbert uzayında kendine eşlenik, pozitif ve kompakt operatördür.

Not. Teorem 4 ve Teorem 5 in ispatları (Olğar, Mukhtarov ve Aydemir, 2018) çalışmasında ki yönteme benzer şekilde yapılır.

$\oplus W_2^1(\Omega)$ Hilbert uzayında sırasıyla

$$\mathrm{P}(f) = f + L_1 f\ , \qquad (18)$$

$$\mathrm{T}(\lambda)\, \mathrm{f} = \mathrm{P}(\mathrm{f}) - \lambda L_2 f \qquad (19)$$

kuralları ile P operatörünü ve $\mathrm{T}(\lambda)$ operatör-demetini tanımlayalım.

Teorem 6. $\lambda_0 \in \square$ nin yeterince büyük pozitif değerleri için $\mathrm{T}(-\lambda_0)$ operatör-polinomu pozitif tanımlıdır.

İspat. $f(x)$, $\oplus W_2^1(\Omega)$ Hilbert uzayının herhangi bir elemanı olsun. $\mathrm{T}(-\lambda_0)$ operatörünün tanımından yararlanmak suretiyle $\forall f(x) \in \oplus W_2^1(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{T}(-\lambda_0) f, f \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} &= \langle (f + L_1 f + \lambda_0 L_2 f), f \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} \\
&= \langle f, f \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} + \langle L_1 f, f \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} + \lambda_0 \langle L_2 f, f \rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} \\
&= \| f \|_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} - \cot\alpha\, |f_1(-1)|^2 + \cot\beta\, |f_2(1)|^2 \\
&\quad + a_1 |f_1(-0)|^2 + a_2 |f_2(+0)|^2 + \lambda_0 \| f \|^2_{\oplus L_2(\Omega)} \qquad (20)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$P(f):=\langle f', f'\rangle_{\oplus L_2(\Omega)}, Q(f):=\langle qf, f\rangle_{\oplus L_2(\Omega)}, R(f):=\langle f, f\rangle_{\oplus L_2(\Omega)}. \qquad (21)$$

O halde (20) nolu eşitlikte bulunan $\|f\|_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)}$ terimini, (21) ile tanımladığımız fonksiyonelleri kullanarak

$$\|f\|_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)} = P(f) + Q(f)$$

biçiminde yazarız.

Sobolev uzayları için iyi bilinen gömülme teoremlerinden yararlanarak, gösterebiliriz ki sıfırdan büyük öyle bir sabit C_{jk} reel sayısı vardır öyle ki $\forall f \in \oplus W_2^1(\Omega)\,(j=1,2,3)$,

$$\left|f(x_j)\right|^2 \le C_{j1}\varepsilon_j\, P(f) + \frac{C_{j2}}{\varepsilon_j}Q(f) \qquad (22)$$

eşitsizlikleri ε_j reel sayısının yeterince küçük pozitif değerleri için sağlanır (burada $x_1=-1, x_2=\mp 0, x_3=1$).

Ayrıca $q(x)$ fonksiyonu pozitif ve sınırlı olduğundan öyle bir $K>0$ sabiti vardır öyle ki

$$\langle L_2 f, f\rangle_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)} = \ell_2(f,f) \ge K\, Q(f) \qquad (23)$$

eşitsizliği sağlanır.

(21) temsilleri ve $(22)-(23)$ eşitsizliklerini (20) eşitliğinde dikkate alarak gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\langle \mathrm{T}(-\lambda_0)f, f\rangle_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)} \ge \left\{1-\left|\cot\beta\right|C_{31}\varepsilon_3-\left|a_1+a_2\right|C_{21}\varepsilon_2-\left|\cot\alpha\right|C_{11}\varepsilon_1\right\}P(f)$$
$$+\left\{1-\left|\cot\beta\right|\frac{C_{32}}{\varepsilon_3}-\left|a_1+a_2\right|\frac{C_{22}}{\varepsilon_2}-\left|\cot\alpha\right|\frac{C_{12}}{\varepsilon_1}+\lambda_0 K\right\}Q(f) \qquad (24)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (24) eşitsizliğinde kısalığın hatırına

$$C_1 := 1-\left|\cot\beta\right|C_{31}\varepsilon_3-\left|a_1+a_2\right|C_{21}\varepsilon_2-\left|\cot\alpha\right|C_{11}\varepsilon_1, \qquad (25)$$

$$C_2(\lambda_0) := 1-\left|\cot\beta\right|\frac{C_{32}}{\varepsilon_3}-\left|a_1+a_2\right|\frac{C_{22}}{\varepsilon_2}-\left|\cot\alpha\right|\frac{C_{12}}{\varepsilon_1}+\lambda_0 K \qquad (26)$$

gösterimlerini kullanırsak

$$\langle \mathrm{T}(-\lambda_0)f, f\rangle_{\oplus W_{2,q}^1(\Omega)} \ge C_1 P(f) + C_2(\lambda_0)Q(f) \qquad (27)$$

elde edilir. (20) ile temsil edilen $\mathrm{T}(-\lambda_0)$ operatörünün pozitif tanımlı olması için (25) ve (26) ile temsil edilen C_1 ve $C_2(\lambda_0)$ ın $C_1>0$ ve $C_2(\lambda_0)>0$ şartını sağlaması gerekmektedir. Bunun için (22) de bahsi geçen $\varepsilon_j\,(j=1,2,3)$ pozitif sayıları yeteri derecede küçük seçilebilir. Bu takdirde $C_1 > 0$ şartı sağlanmış olur. λ_0 özdeğer parametresi de yeteri derecede büyük pozitif sayı seçilmesi durumunda $C_2(\lambda_0) > 0$ şartı da sağlanmış olur.

Bu takdir de

$$\left\langle \mathrm{T}(-\lambda_0)f \, , f \right\rangle_{\oplus W^1_{2,q}(\Omega)} \geq \min\left\{C_1 , C_2(\lambda_0)\right\} \| f \|^2_{\oplus W^1_2(\Omega)}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Bu ise $\mathrm{T}(-\lambda_0)$ operatörünün pozitif tanımlı olduğunu gösterir.

4. Teşekkür

Bu çalışma Latin American Scientific Research Conference on Natural and Applied Sciences' da kısmen sunulmuştur.

5. Kaynaklar

Akcay, O. 2021. Uniqueness Theorems for Inverse Problems of Discontinuous Sturm–Liouville Operator. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 44, 1927–1940.

Allahverdiev, B. P., Tuna, H. 2021. Conformable fractional Sturm–Liouville problems on time scales. Math Meth Appl Sci. 2021;1–16, DOI: 10.1002/mma.7925.

Bairamov, E., Aygar,Y. ve Oznur, G.B. 2019. Scattering properties of eigenparameter dependent impulsive Sturm–Liouville Equations. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43 (2019) 2769-2781.

Belinskiy, B.P., Hiestand, J.W. ve Matthews, J.V. 2015. Piecewise Uniform Optimal Design Of A Bar With An Attached Mass, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2015, No. 206, pp. 1–17.

Belinskiy, B.P. ve Dauer, J.P. 1997. On a regular Sturm - Liouville problem on a finite interval with the eigenvalue parameter appearing linearly in the boundary conditions, Spectral theory and computational methods of Sturm-Liouville problem. Eds. D. Hinton and P. W. Schaefer, 1997.

Binding, P.A, Browne, P.J. ve Seddighi, K. 1993. Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc., 37(2), 57-72.

Fulton, C.T. 1977. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A77, 293-308.

Gwak, S., Kim, J., Rey, S.J. 2016. Massless and massive higher spins from anti-de Sitter space waveguide, Journal of High Energy Physics, volume 2016, Article number: 24.

Kaoullas, G. ve Georgiou, G.C. 2015. Start-up and cessation Newtonian Poiseuille and Couette flows with dynamic wall slip, Meccanica, 50:1747–1760.

Kandemir, M. ve Mukhtarov, O. Sh. 2018. Solvability of fourth order Sturm -Liouville problems with abstract linear functionals in boundary-transmission conditions, Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI: 10.1002/mma.4852.

Kawano, A. ve Morassi, A.. A Uniqueness Result On Detecting A Prey In A Spider Orb-Web, arXiv:1906.03610.

Ladyzhenskaia, O. A. 1985. The Boundary Value Problems Of Mathematical Physics, Springer-Verlag, New York.

Mukhtarov, O. Sh. ve Aydemir, K. 2021. Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. Mathematical Modelling and Analysis, 26(3), 432-443.

Mukhtarov, O. Sh. ve Aydemir, K. 2020. Discontinuous Sturm-Liouville Problems Involving An Abstract Linear Operator. Journal of Applied Analysis & Computation, 10(4), 1545-1560.

Mukhtarov, O. Sh, Olğar, H. ve Aydemir, K. 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems. Filomat 29, 1671–1680

Mukhtarov, O. Sh., Yakubov, S. 2002. Problems for differential equations with transmission conditions, Applicable Anal. 81, 1033–1064.

Olğar, H., Mukhtarov, O.Sh. ve Aydemir, K. 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem, Filomat, 32:3, 911-920.

Nie, Y. ve Linetsky, V. 2019. Sticky reflecting Ornstein-Uhlenbeck diffusions and the Vasicek interest rate model with the sticky zero lower bound. Stochastic Models, pages 1–19.

Parra Rodriguez, A., Rico, E., Solano, E. ve Egusguiza, I.L. 2018. Quantum Networks in Divergence-free Circuit QED, Quantum Sci. Technol. 3 (2018), no. 2, 024012, 46pp, arXiv:1711108817.

Şen, E., Stikonas, A. 2021. Asymptotic Distribution of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Nonlocal Boundary Value Problem. Mathematical Modelling and Analysis, 26(2) , 253-266.

Titchmars, E. C., 1962. Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, second edn. Oxford Univ. press, London.

Walter, J. 1973. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. Math. Z. 133**,** 301-312.

Yakubov, S. Y. ve Yakubov, Y. Y. 1999. Abel Basis Of Root Functions Of Regular Boundary Value Problems, Math. Nachr. 197, 157-187.