Çokparametreli İkili Lineer Fark Denklemler Sistemi İle Verilen Süreçler İçin Optimal Kontroletme Problemi

Yakup H. HACIYEV*

ÖZET

Bilim ve tekniğin farklı problemleri çok parametreli ikili lineer fark denklemleri sistemi ile tasvir edilir. Özellikle böyle problemlerle radioteknikde, telemetrede, otomatik kontrol etmede, kozmik incelemelerde rastlanılır. Ayrıca teknik süreçlerin bilgisayar yardımı ile yönetilmesinde nesne ve süreçlerin imitasyon modelleştirilmesinde, çağdaş hesaplama sistemlerinin yapılmasında çok sık kullanılan çok parametreli ikili lineer ardışık makinelerin bu tür sistemlerle verile bilmesi çok parametreli ikili lineer fark denklemleri sisteminin ve onunla ifade edile bilen problemlerin daha derinden incelenmesini talep eder. Adı çekilen sorunlara uygun optimal kontrol etme problemlerinin çözümü için yöntemlerin bulunması güncel olup, önem taşımaktadır.

Çalışmada çok parametreli ikili lineer fark denklemleri sistemi incelenmekte ve böyle sistemler için aşağıdaki optimal kontroletme problemine bakılmaktadır:

$$\xi_v s(c) = \Phi_v(c)s(c) \oplus \Psi_v(c)x(c), \; c \in G_d$$
$$v = 1,...,k, \; [GF(2)]$$
$$s(c^0) = s^0,$$
$$x(c) \in \hat{X}, c \in \hat{G}_d,$$
$$J(x) = a's(c^L) \to \min$$

Burada

$$c = (c_1,...,c_k) \in G_d = \{c \mid c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^{L_1},...,c_k^0 \le c_k \le c_k^{L_k}, c_i \in Z\}$$

Z^k *dan alınan noktalardır.* L_i, $i = 1,...,k$ *tamsayılardır.* $Z = \{...,-1,0,1,...\}$, *tam sayılar kümesidir.* $s(c) \in S, x(c) \in X$; $S = [GF(2)]^m$, $X = [GF(2)]^r$ *sırasıyla durum ve giriş alfabeleridir.* $s(c)$ *ve* $x(c)$ *ise* Z^K *kümesinde tanımlanan m ve r boyutlu durum ve giriş vektörleridir.* $\xi_v s(c)$ *aşağıdaki gibi*

* Doç.Dr, Onsekiz Mart Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Çanakkale

tanımlanan kaydırma operatörüdür $\{\Phi_v(c), v=1,..k\}$, $\{\Psi_v, v=1,...,k\}$ *sırası ile* $m\times n$ *ve* $m\times r$ *boyutlu karakteristik boole geçit matrisleridir.* $[GF(2)]$ *Galois cismidir,* $s(c^0)=s^0$ *başlangıç durum vektörü,* $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ *verilmiş boole vektörü,* a *üzerindeki işaret evrik işareti,* $L=L_1+L_2+...+L_k$ *sürecin devam etme süresidir.* $\hat{G}_d=G_d\setminus\{c^L\}$ *ve* $\hat{X}=\{x(c), c\in\hat{G}_d\}$*'dir.*

Bakılan problem için gerek ve yeter koşul teoremi ispat edilmektedir. Ayrıca sükunet durumda olan sistem için farklı bir gerek ve yeter koşul teoremi de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Boole matrisi, kaydırma operatörü, Galois cismi, en iyileme, çok parametreli fark denklemi*

1. ÇOK PARAMETRELİ LİNEER FARK DENKLEMLER SİSTEMİ VE OPTİMAL KONTROL ETME PROBLEMİ

Çok parametreli fark denklemleri sistemi aşağıdaki gibi tasvir edilir(Gayşun, 1985):

$$\xi_v s(c)=\Phi_v(c)s(c)\oplus\Psi_v(c)x(c) \qquad v=1,...,k,[GF(2)] \qquad (1)$$
$$s(c^0)=s^0$$

Burada $c=(c_1,...,c_k)\in G_d=\{c \mid c\in Z^k, c_1^0\le c_1\le c_1^{L_1},...,c_k^0\le c_k\le c_k^{L_k}, c_i\in Z\}$ Z^k dan alınan noktalardır. L_i, i=1,...,k tamsayılardır. $Z=\{...,-1,0,1,...\}$, tam sayılar kümesidir. $s(c)\in S, x(c)\in X$; $S=[GF(2)]^m$, $X=[GF(2)]^r$ sırasıyla durum ve giriş alfabeleridir. $s(c)$ ve $x(c)$ ise Z^K kümesinde tanımlanan m ve r boyutlu durum ve giriş vektörleridir. $\xi_v s(c)$ aşağıdaki gibi tanımlanan kaydırma operatörüdür (Gayşun, 1985; Richard&Douglas, 1985):

$$\xi_v s(c)=s(c+e_v); e_v=(0,...,0,\overset{v}{1},0,...,0) \ , \ v=1,...,k$$

$\{\Phi_v(c), v=1,..k\}$, $\{\Psi_v, v=1,...,k\}$ sırası ile $m\times n$ ve $m\times r$ boyutlu karakteristik boole geçit matrisleridir. $[GF(2)]$ Galois cismidir, $s(c^0)=s^0$ başlangıç durum vektörüdür.

Eğer (1) sistemi ile çok parametreli ikili lineer ardışık makineleri tasvir edilmiş ise o zaman bu makinelerle verilen optimal kesikli süreçler

$$J(x)=a's(c^L) \qquad (2)$$

şeklinde boole fonksiyonelle karakterize oluyor. Burada $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ verilmiş boole vektörü, a üzerindeki işaret evrik işareti, $L=L_1+L_2+...+L_k$ sürecin devam etme süresidir. $\hat{G}_d$ kümesinde tanımlanan ve değerler kümesi $[GF(2)]^r$ olan her bir r-boyutlu $X(c)=(x_1(c),...,x_r(c))$ yönetici vektör fonksiyonlar kümesini $\hat{X}$ ile gösterelim. Yani $\hat{X}=\{x(c),c\in\hat{G}_d\}$ olsun. Görüldüğü gibi her bir $x(c)\in\hat{X}$ için (1) sisteminde denklemlerin sayısı bilinmeyenlerin sayısından fazladır. Bu bakımdan probleme aşağıdaki gibi mümkün optimal kontrol edici anlayışı dahil etmek amaca uygundur.

Tanım: Eğer $\hat{X}$ kümesinden alınmış $x(c)\in\hat{X}$ için (1) sisteminin tek çözümü varsa, o zaman $x(c)$ ye mümkün kontrol edici denir (Hacıyev, 2000).

Şimdi lineer olmayan ikili çok parametreli sonlu ardışık makineleri için aşağıdaki gibi terminal idare etme problemine bakabiliriz.

Verilmiş lineer olmayan ikili çok parametreli sonlu ardışık makinesini L adımda s^0 başlangıç durumundan $s^*(c^L)$ son duruma getiren öyle mümkün $x(c)\in\hat{X}$ kontrol edicisinin bulunması gerekiyor ki, (2) fonksiyoneli minimal değer alsın:

$$\xi_v s(c)=\Phi_v(c)s(c)\oplus\Psi_v(c)x(c),\ c\in G_d \qquad v=1,...,k,[GF(2)] \tag{3}$$

$$s(c^0)=s^0,$$

$$x(c)\in\hat{X},c\in\hat{G}_d, \tag{4}$$

$$J(x)=a's(c^L)\rightarrow\min \tag{5}$$

Burada $\hat{G}_d=G_d\setminus\{c^L\}$.

2. OPTİMALLIK İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL

Yukarıda belirttiğimiz (1) sistemi için tek çözüm koşulunun sağlandığını farz edelim (Gayşun, 1985; Hacıyev, 1999) ve önceki bolümde bakılan meseleni çözmek için $\varphi(c)=\Phi'_v(c)\varphi(\xi_v c),c\in G_d$, v= $1,...,k,[GF(2)]$ şekilli ardışık makinesini göz önüne alarak, $h_v(c,x(c),\varphi(\xi_v c))=\varphi'(\xi_v c)\Psi_v(c)x(c)$, v= $1,...,k,[GF(2)]$ boole fonksiyonellerini yazalım. Daha sonra bu fonksiyonellerin yardımı ile

$$\hat{h}=\sum_{L(c^l,c^L)}\sum_{v=1}^{k}h_v(c,x(c),\varphi(\xi_v c))\Delta_2 c_v,\ [GF(2)], \tag{6}$$

boole toplamını oluşturalım. Burada Δ_2 birinci boole farkıdır.

c^0 ve c^L noktalarını birleştiren her hangi $\hat{L}(c^0,c^1,...,c^L)$ kesikli eğrisini [ ] seçelim. Bu zaman her bir l'inci adımda $0\le l<L$, c^l'den c^{l+1}'in seçilmesi v

değerinin kayıt edilmesi ile gerçekleşir. v'nün böyle değerini v_t ile gösterelim. O zaman (6) boole toplamını aşağıdaki gibi de yaza bileriz:

$$\hat{h} = \sum_{(c^l, c^L)} h_{v_t}(c^{t-1}, x(c^{t-1}), \varphi(c^t)) = \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, x(c^{t-1}), \varphi(c^t)) \tag{7}$$

Şimdi Hamilton-Pontryagin fonksiyonelinin boole benzeri olan

$$H(\varphi(c), s(c)) = \varphi(c)s(c), c \in G_d \tag{8}$$

fonksiyonelini dahil edelim.

Teorem. İstenilen c^l, $0 \le l < L$ noktası için $x^0(c^l, c^{L-1}) = \{x^0(c^l), x^0(c^{l+1}), ..., x^0(c^{L-1})\}$ kontrol edicisinin ve ona uygun $s^0(c^l, c^L) = \{s^0(c^l), s^0(c^{l+1}), ..., s^0(c^L)\}$ yörüngesinin optimal (en iyi) olması için gerek ve yeter koşul

$$H(\varphi^0(c^l), s^0(c^l)) = \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, \varphi^0(c^t) x^0(c^{t-1})) \tag{9}$$

şartının sağlanmasıdır.

Burada $\varphi^0(c^t)$'$ler, t = l, l+1, ..., L-1$ $\varphi(c) = \Phi_v'(c)\varphi(\xi_v c), c \in G_d$, v= 1,...,k, $[GF(2)]$ denkleminden $\varphi^0(c^L) = a$ başlangıç şartının yardımı ile bulunur.

Gereklilik. (7)'den istenilen $l+1 \le t \le L$ için yaza bileriz:

$$\begin{aligned}
H(\varphi^0(c^t), s^0(c^t)) &= \varphi^0(c^t)s^0(c^t) = \\
&= \varphi^0(c^t)\Phi_{v_t}(c^{t-1})s^0(c^{t-1}) \oplus \varphi^0(c^t)\Psi_{v_t}(c^{t-1})x^0(c^{t-1}) = \\
&= \varphi^0(c^{t-1})s^0(c^{t-1}) \oplus \varphi^0(c^t)\Psi_{v_t}(c^{t-1})x^0(c^{t-1}) = \\
&= H(\varphi^0(c^{t-1}), s^0(c^{t-1})) \oplus h_{v_t}(c^{t-1}, x^0(c^{t-1}), \varphi^0(c^t))
\end{aligned}$$

Eğer eşitliğin her tarafını $l+1$'den L kadar toplamını yazacak olursak,

$$\sum_{t=l+1}^{L} H(\varphi^0(c^t), s^0(c^T)) = \sum_{t=l+1}^{L} H(\varphi^0(c^{t-1}), s^0(c^{t-1})) \oplus \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, x^0(c^{t-1}), \varphi^0(c^t))$$

buluruz. Buradan ise,

$$H(\varphi^0(c^L)S^0(c^L)) = H(\varphi^0(c^l), s^0(c^l)) \oplus \sum_{t=l+1}^{L} h_{v_t}(c^{t-1}, x^0(c^{t-1}), \varphi^0(c^t)) \tag{10}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan $\Phi(s^0(c^L)) = a's^0(c^L) = \varphi^0(c^L)s^0(c^L) = H(\varphi^0(c^L), s^0(c^L))$ sağlandığına ve $s^0(c^L)$ optimal durum olduğuna göre $H(\varphi^0(c^L), s^0(c^L)) = 0$ elde ederiz. Bu ise (9) eşitliğinin doğru olduğunu gösteriyor. Böylece gereklilik ispatlanır.

Gereklilik koşulunun ispat yönteminden göründüğü gibi yeterlilik (10) şartından direkt olarak bulunur.

Farz edelim ki (1) sistemi sükunettedir. Bu durum için aşağıdaki gerek ve yeter koşul ispatlana bilir.

Teorem. $x^0(c)$ kontrol edicisinin ve ona uygun $s^0(c)$ yörüngesinin (3)-(5) probleminde optimal olması için gerek ve yeter koşul

$$\overline{(\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{v=1}^{k} h_v(c, x^0(c), \varphi^0(\xi_v c))\Delta_2 c_v) \times (\sum_{(c^0,c^L)} \sum_{v=1}^{k} h_v(c, x(c), \varphi^0(\xi_v c))\Delta_2 c_v)} = 0, GF(2)$$

şartının sağlanmasıdır.

Burada yukarıdaki çizgi değeli işlemini gösteriyor. Sol taraftaki toplam ise c^0 ve c^L noktalarını birleştiren kesikli eğri boyunca bütün mümkün $x(c)$ kontrol edicileri için yapılır.

KAYNAKLAR

BOLTYANSKİY, V.G. (1994), *Diskret sistemlerde optimal kontrol etme*, Moskova İLM,

RİCHARD, L.BURDEN, DOUGLAS, J. (1985), *Faires:Numerical Analysis*-PWS Publishin Company, Boston

GAYŞUN, İ.B. (1985), *Çok parametreli diferansiyel denklemler için tam çözüm koşulları*, Minsk

HACIYEV, Y.H. (1999), *"The existence theorem for terminal control problem in processes described by discrete system of equations"*, "Second International Symposium on Mathematical Computational Applications'', Qafgaz University

HACIYEV, Y.H. (2000), *"Lineer olmayan çok parametreli sonlu fark denklemler sisteminin analizi"*, Devlet İstatistik Enstitüsü, İstatistik Araştırma Sempozyumu, Ankara

An Optimal Control Problem For Peocesses Given By Multyparametric Binary Linear Defference Equations

ABSTRACT

Many problems of science and technics are shown with multiparametric finite linear difference equation systems.

Such problems are used in radiotechnics, telemetrics, otomatic controling, and cosmic researching. Linear sequential machines which frequently used in constructing modern calculating systems, imitative modeling of object and processes are described with such systems. Therefore this systems and the problems which are given by this systems are demanded to analyse. It is necessary and actual to find the methods for solving an optimal control problems.

In this study multiparametric dual linear difference equation systems are analysed and researching an optimal controling problems which are shown below for this systems:

$$\xi_v s(c) = \Phi_v(c)s(c) \oplus \Psi_v(c)x(c),\ c \in G_d$$

$$v = 1,\dots,k,\ [GF(2)]$$

$$s(c^0) = s^0,$$

$$x(c) \in \hat{X}, c \in \hat{G}_d,$$

$$J(x) = a's(c^L) \to \min$$

Here

$c = (c_1,\dots,c_k) \in G_d = \{c \mid c \in Z^k, c_1^0 \le c_1 \le c_1^{L_1},\dots,c_k^0 \le c_k \le c_k^{L_k}, c_i \in Z\}$ *points from* Z^k. L_i, $i=1,\dots,k$ *integers.* $Z = \{\dots,-1,0,1,\dots\}$ *integers set.* $s(c) \in S, x(c) \in X$; $S = [GF(2)]^m$, $X = [GF(2)]^r$ *are state and enter alphabetic adequatly. But* $s(c)$ *and* $x(c)$ *are m and r size state and enter vektors which are described in* Z^K *set.* $\xi_v s(c) = s(c + e_v); e_v = (0,\dots,0,\overset{v}{1},0,\dots,0)$, $v=1,\dots,k$ *is a shift operator which is described below as* $\{\Phi_v(c), v = 1,\dots k\}$, $\{\Psi_v, v = 1,\dots,k\}$ *are* $m \times n$ *and* $m \times r$ *size characteristic boole gate matrix adequate.* $[GF(2)]$ *Galois object,* $s(c^0) = s^0$ *start state vector,* $a = (a_1, a_2,\dots,a_m)$ *boole vector, the marker on a is transpose,* $L = L_1 + L_2 + \dots + L_k$ *continue time of process.* $\hat{G}_d = G_d \setminus \{c^L\}$ *and* $\hat{X} = \{x(c), c \in \hat{G}_d\}$.

In this study necessary and sufficient conditions theorems are proved for shown problems. Except of this the different necessary and sufficient conditions theorems for stable systems are given also.

Key Words: *boole matrix, shift operator, Galois object, optimization, multiparametric difference equation*