

CR-Bulanık Esnek Kümelerin Karar Verme Problemleri Üzerine Bir Uygulaması

Ferhan Şola Erduran^{*1} , Yaren Münüsoğlu² 

¹Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

²Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Yeni bir kavram olan CR-bulanık esnek kümeler üzerinde bazı işlemler verilmiştir.
- CR-bulanık esnek kümeleri kullanan bir karar verme algoritması tanıtılmıştır.
- Elde edilen algoritmanın bir karar verme problemine uygulaması verilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 11/07/2024

Kabul: 21/11/2024

Anahtar Kelimeler

Bulanık küme,
Esnek küme,
CR-bulanık esnek küme,
Karar verme

Öz

Günlük yaşamımızda, mühendislik, sağlık, ekonomi ve hukuk gibi alanlarda karşılaştığımız belirsizlik problemlerinin sayısı ve çeşidi giderek artmaktadır. Belirsizliklerle başa çıkmada son derece etkili yöntemler üretilmektedir. Özellikle bulanık küme ve türevleri ile esnek kümelerin hibrit versiyonları bu konuda oldukça başarılı sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada daha önce tanıtılan köpkök-bulanık (kısaca CR-bulanık) esnek kümeler için bazı küme işlemleri verilmiştir. Bahsi geçen kümeler yardımıyla bir karar verme algoritması önerilmiş ve bir aday seçme problemine uygulanmıştır. Bu problemdeki veriler dikkate alındığında çözüm için en uygun metodun CR-bulanık esnek kümeler kullanılmasıyla elde edilebileceği görülmüştür.

An Application of CR-Fuzzy Soft Sets on Decision-Making Problems

Highlights

- Some operations are given on CR-fuzzy soft sets, which is a new definition.
- A decision-making algorithm using CR-fuzzy soft sets is introduced.
- The application of the obtained algorithm to a decision-making problem is given.

Article Info

Received: 11/07/2024

Accepted: 21/11/2024

Keywords

Fuzzy set,
Soft set,
CR-Fuzzy soft set,
Decision-making

Abstract

The number and variety of uncertainty problems we encounter in our 1ort lives, in fields, such as engineering, health, economics, and law are increasing. Extremely effective methods are being produced to cope with uncertainties. Especially hybrid versions of fuzzy sets and their extensions and soft sets give very successful results in this regard. In this study, some set operations are given for cube root-fuzzy (CR-fuzzy, for short) soft sets. A decision-making algorithm is suggested with the help of the mentioned sets and applied to a candidate selection problem. Considering the data in this problem, it has been seen that the most appropriate method 1ort he solution can be obtained by using CR-fuzzy soft sets.

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Ferhan Şola Erduran, ferhansola@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Bulanık küme teorisi, belirsizlik içeren problemlerin matematiksel modellenmesi amacıyla Zadeh [1] tarafından ortaya konulan etkili bir kavramdır. Günlük hayatta karşılaştığımız pek çok problemin klasik küme mantığı olan 0 ve 1 mantığına göre her zaman çözülemediği bunun ancak $[0,1]$ aralığındaki değerlerin kullanılarak ifade edilebileceği anlaşılmıştır. Bulanık küme teorisinin analiz ve topoloji gibi bilim dallarında matematiksel alt yapısı oluşturulmuş literatürde bilinen pek çok teori, bulanık kümeler kullanılarak genelleştirilmiştir [2-7]. 1986 yılında Atanassov [8] sezgisel bulanık küme kavramı ile belirsizlik problemlerinin çözümüne yeni bir bakış açısı getirmiştir. Örneğin, saniyede on sinyal üreten bir parçacık sayacından alınan verilerden sekizi pozitif ve ikisi negatifse, bu durum 0.8 bulanık değeriyle temsil edilir. Bulanık kümeler, bu problemi $(0.8,0.2)$ sezgisel bulanık değerini kullanarak etkili bir şekilde temsil edebilir. Ancak, aynı sayaçtan toplanan verilerin beşi pozitif, ikisi negatif ve üçü bozuksa, bu durum bulanık değerler kullanılarak temsil edilemez. Bunun yerine $(0.5,0.2)$ olan sezgisel bulanık değer kullanılarak ifade edilebilir. Dolayısıyla sezgisel bulanık küme, bulanık kümenin yetersiz kaldığı durumları modellemekte daha başarılıdır. Gerçek dünya problemlerinin çözümüne yönelik başlatılan bu çalışmaların hızla devam etmesiyle sezgisel bulanık kümelerin de cevap veremediği problemler ortaya çıkmıştır. Bu problemlerin çözümü için yeni çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Yager [9], sezgisel bulanık kümelerin genellemesi olan Pisagor bulanık kümesi olarak adlandırılan standart dışı bir küme tanımı vermiştir. Pisagor bulanık kümelerinin yapısı, belirsiz bilgileri sezgisel bulanık kümelerden daha yeterli ve doğru bir şekilde karakterize etmek için kullanılabilir. Garg [10], aralık değerli Pisagor bulanık kümelerinin sıralama düzeni için geliştirilmiş bir skor fonksiyonu ortaya koymuştur. İbrahim ve diğerleri [11], $(3,2)$ -bulanık kümeler olarak adlandırılan yeni bir genelleştirilmiş Pisagor bulanık kümesi tanımlamıştır. Cuong [12], betimsel bulanık küme tanımını vermiştir. Örneğin bir başkanlık seçiminde seçmenlerin oyları üç kategoriye ayrılabilir: evet, hayır ve çekimser. Böyle bir süreci temsil etmek için betimsel bulanık kümeler kullanılması daha isabetli olmuştur. Daha sonra Memiş [13], tutarlılığı korumak için betimsel bulanık kümeler ve ilişkili işlemler fikrini revize etmiştir. 2020’de Senapati ve Yager [14] tarafından önerilen Fermate bulanık kümeleri, karar verme sürecinde belirsiz bilgileri daha kolay işleyebilmektedir. Al-shami ve diğerleri [15], karekök bulanık (kısaca, SR-bulanık) küme adı verilen bulanık kümelerin yeni bir uzantısını tanıtmıştır. 2023 yılında ise Salih ve İbrahim [16], küpkök bulanık (kısaca, CR-bulanık) küme tanımını vererek yukarıda bahsi geçen kümeler ile ilişkisini incelemiştir. CR-bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümelerin cevap veremediği problemlere uygulama açısından daha kullanışlı olabilmektedir. Örneğin $(0.4,0.7)$ değerini içeren bir belirsizlik problemi, sezgisel bulanık küme yöntemiyle çözülemez ancak CR-bulanık kümeler bu probleme uygun çözüm sunmaktadır.

Diğer taraftan, yukarıda söz edilen parçacık sayacı probleminde sayaçların konumlarını da göz önüne aldığımızda alternatif kümeyi dikkate alınan parametreler aracılığıyla parametrelendirebilen farklı bir matematiksel araca ihtiyaç duyulmuştur. Bu nedenle, böyle bir problemle başa çıkmak için 1999 yılında Molodtsov [17] esnek küme kavramını tanıtmıştır. Ayrıca, bozuk sinyalleri kullanarak en uygun konumu belirlemeyle ilgili bir problem söz konusu olduğunda, sezgisel bulanık kümeler ile esnek kümelerin birleştirilmesi gereklidir. Bu bağlamda, literatürde sezgisel bulanık kümeler ve esnek kümelerin çeşitli hibrit versiyonları yer almaktadır. Örneğin sezgisel bulanık esnek kümeler [18], sezgisel bulanık parametrelili esnek kümeler [19], sezgisel bulanık parametrelili bulanık esnek kümeler [20], bulanık parametrelili sezgisel bulanık esnek kümeler [21], sezgisel bulanık parametrelili sezgisel bulanık esnek kümeler [22], aralık değerli sezgisel bulanık parametrelili aralık değerli sezgisel bulanık esnek kümeler [23], betimsel bulanık parametrelili betimsel bulanık esnek kümeler [24, 25] gibi.

Bu çalışma şu şekilde organize edilmiştir: 2. Bölümde, sonuçların teorik alt yapısı için kullanılacak olan temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir. CR-bulanık esnek kümeler [26] üzerinde bazı küme işlemleri sunulmuştur. 3. Bölümde CR-bulanık esnek kümeler yardımıyla bir karar verme algoritması önerilmiştir. Önerilen algoritma, sezgisel bulanık esnek küme standartlarına uymayan farklı belirsizlikler içeren bir problemin çözümünde uygulanmıştır. Böylece, CR-bulanık esnek kümelerin daha verimli karar verme süreçleri oluşturmaya elverişli olduğu görülmüştür. 4. Bölüm de tartışma ve sonuç olarak ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonra kullanılacak olan temel kavramlar hatırlatılmıştır. Ayrıca CR-bulanık esnek kümeler üzerinde bazı küme işlemleri verilmiştir.

Tanım 2.1. [1] U evrensel küme olmak üzere, $A = \{(u, \mu_A(u)): u \in U\}$ şeklindeki kümeye U üzerinde bir bulanık küme denir. Burada $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ve $\mu_A(u)$, x elemanının A kümesine üye olma derecesidir. Ayrıca bu küme $A = \{u^{\mu_A(u)}: u \in U\}$ ile de ifade edilebilir.

Tanım 2.2. [8] U evrensel küme olmak üzere, $A = \{(u, \mu_A(u), \nu_A(u)): u \in U\}$ şeklindeki kümeye U üzerinde bir sezgisel bulanık küme denir. Burada $\mu_A, \nu_A: U \rightarrow [0,1]$ olup sırasıyla u elemanının A kümesine üye olma ve üye olmama dereceleridir. Her $u \in U$ için, $0 \leq \mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1$ şartı sağlanır. Burada, $\pi_A(u) = 1 - \mu_A(u) - \nu(u)$ değeri de u nun belirsizlik derecesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. [15] U evrensel küme ve $A \subseteq U$ olsun. Her $u \in U$ için $0 \leq (\mu_A(u))^2 + \sqrt{\nu_A(u)} \leq 1$ olmak üzere $A = \{(u, \mu_A(u), \nu(u)): u \in U\}$ ile verilen kümeye bir SR-bulanık küme denir.

Tanım 2.4. [16] U evrensel küme ve $A \subseteq U$ olsun. Her $u \in U$ için $0 \leq (\mu_A(u))^3 + \sqrt[3]{\nu_A(u)} \leq 1$ olmak üzere $A = \{(u, \mu_A(u), \nu(u)): u \in U\}$ ile verilen kümeye U üzerinde bir CR-bulanık küme denir.

Örnek 2.5. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ evrensel küme ve $A = \{(u_1, 0.2, 0.9), (u_2, 0.3, 0.9), (u_3, 0.3, 0.8), (u_4, 0.4, 0.7), (u_5, 0.4, 0.8), (u_6, 0.5, 0.6)\}$ olarak verilsin.

$$(0.2)^3 + \sqrt[3]{0.9} = 0.97$$

$$(0.3)^3 + \sqrt[3]{0.9} = 0.99$$

$$(0.3)^3 + \sqrt[3]{0.8} = 0.95$$

$$(0.4)^3 + \sqrt[3]{0.7} = 0.95$$

$$(0.4)^3 + \sqrt[3]{0.8} = 0.99$$

$$(0.5)^3 + \sqrt[3]{0.6} = 0.96$$

olduğundan A kümesi bir CR-bulanık kümedir. Ancak sezgisel bulanık küme değildir. Çünkü örneğin, $0.2 + 0.9 = 1.1 \nless 1$ 'dir.

Tanım 2.6. [17, 27] U evrensel küme, E bir parametre kümesi, $P(U)$, U kümesinin kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olmak üzere, U üzerinde bir F_A esnek kümesi,

$$F_A = \{(x, f_A): x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$$

ikilileri ile tanımlanır. Burada

$$f_A: E \rightarrow P(U), x \notin A \text{ ise } f_A(x) = \emptyset$$

şeklinde tanımlı fonksiyona F_A esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu denir.

Tanım 2.7. [18] U evrensel küme, E parametre kümesi, $F(U)$, U üzerindeki tüm bulanık kümelerin ailesi olsun. $A \subseteq E$ olmak üzere, U üzerinde bir Γ_A bulanık esnek kümesi,

$$\Gamma_A = \{(x, \gamma_A): x \in E, \gamma_A \in F(U)\}$$

ikilileri ile tanımlanır.

Burada

$\gamma_A: E \rightarrow F(U)$, $x \notin A$ ise $\gamma_A(x) = \emptyset$ şeklinde tanımlı fonksiyona Γ_A bulanık esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu denir.

Tanım 2.8. [26] U evrensel küme, E parametre kümesi, $CRF(U)$, U üzerindeki tüm CR-bulanık kümelerin ailesi olsun. $A \subseteq E$ olmak üzere, U üzerinde bir Υ_A CR-bulanık esnek kümesi,

$$\Upsilon_A = \{(x, \varepsilon_A): x \in E, \varepsilon_A \in CRF(U)\}$$

ikilileri ile tanımlanır. Burada

$$\varepsilon_A: E \rightarrow CRF(U), x \notin A \text{ ise } \varepsilon_A(x) = \emptyset$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Υ_A CR-bulanık esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu denir.

Bir CR-bulanık esnek küme, U nun CR-bulanık alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Ayrıca, $\varepsilon_{\bar{E}}(x) = \{(u, 1, 0): u \in U\}$ kümesine evrensel CR-esnek bulanık küme denir. $\Upsilon_{\bar{E}}$ ile gösterilir. $\varepsilon_{\emptyset}(x) = \{(u, 0, 1): u \in U\}$ kümesine boş küme denir. $\Upsilon_{\emptyset}$ ile gösterilir.

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm CR-bulanık esnek kümelerin ailesi $CRFS(U)$ ile gösterilmiştir.

Örnek 2.9. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel küme, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ parametre kümesi ve $A = \{x_1, x_2, x_4\}$ olsun.

$$\begin{aligned}\varepsilon_A(x_1) &= \{(u_1, 0.2, 0.9), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.5, 0.6)\} \\ \varepsilon_A(x_2) &= \{(u_1, 0.6, 0.2), (u_2, 0.1, 0.8), (u_3, 0.4, 0.7)\} \\ \varepsilon_A(x_4) &= \{(u_1, 0.9, 0.3), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.8, 0.1)\}\end{aligned}$$

olmak üzere Υ_A , CR-bulanık esnek kümesi

$$\Upsilon_A = \left\{ (x_1, \{(u_1, 0.2, 0.9), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.5, 0.6)\}), (x_2, \{(u_1, 0.6, 0.2), (u_2, 0.1, 0.8), (u_3, 0.4, 0.7)\}), (x_4, \{(u_1, 0.9, 0.3), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.8, 0.1)\}) \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.10. [26] $\Upsilon_A, \Upsilon_B \in CRFS(U)$ olmak üzere, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için,

1. $\Upsilon_A = \Upsilon_B \Leftrightarrow \varepsilon_A(x) = \varepsilon_B(x)$
 $\varepsilon_A(x) = \varepsilon_B(x) \Leftrightarrow \mu_{\varepsilon_A(x)}(u) = \mu_{\varepsilon_B(x)}(u) \text{ ve } v_{\varepsilon_A(x)}(u) = v_{\varepsilon_B(x)}(u)$
2. $\Upsilon_A \subseteq \Upsilon_B \Leftrightarrow \varepsilon_A(x) \leq \varepsilon_B(x)$
 $\varepsilon_A(x) \leq \varepsilon_B(x) \Leftrightarrow \mu_{\varepsilon_A(x)}(u) \leq \mu_{\varepsilon_B(x)}(u) \text{ ve } v_{\varepsilon_A(x)}(u) \geq v_{\varepsilon_B(x)}(u)$

dır.

Tanım 2.11. [26] $\Upsilon_A \in CRFS(U)$ olmak üzere, Υ_A 'nın tümleyeni

$$\Upsilon_A^c = \{(x, \varepsilon_A^c(x)): x \in E\}$$

olarak tanımlanır. Burada, $\varepsilon_A^c(x) = (\varepsilon_A(x))^c$ olup $(\varepsilon_A(x))^c$, CR-bulanık kümesinin tümleyeni, her $x \in E$ ve her $u \in U$ için

$$(\varepsilon_A(x))^c = \left\{ \left(u, \sqrt[9]{v_{\varepsilon_A(x)}(u)}, (\mu_{\varepsilon_A(x)}(u))^9 \right) : u \in U \right\}$$

ile ifade edilir.

Örnek 2.12. Örnek 2.9 da verilen Y_A kümesinin tümleyeni,

$$Y_A^c = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \{(u_1, 0.9883, 0.00000005), (u_2, 0.9755, 0.000019683), (u_3, 0.9448, 0.001953125)\}) \\ (x_2, \{(u_1, 0.8362, 0.010077696), (u_2, 0.9755, 0.0000000001), (u_3, 0.9611, 0.000262144)\}) \\ (x_4, \{(u_1, 0.9883, 0.000019683), (u_2, 0.9755, 0.000019683), (u_3, 0.7742, 0.134217728)\}) \end{array} \right\}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.13. [26] $Y_A \in CRFS(U)$ olmak üzere, $(Y_A^c)^c = Y_A$ ’dır.

Tanım 2.14. [26] $Y_A, Y_B \in CRFS(U)$ olmak üzere, Y_A ve Y_B ’nin birleşimi

$$Y_A \cup Y_B = \{(x, \varepsilon_{A \cup B}(x)) : x \in E\}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\varepsilon_{A \cup B}(x) = \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_B(x)}(u)\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_B(x)}(u)\}) : u \in U\} \text{ biçimindedir.}$$

Örnek 2.15. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel küme, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ parametre kümesi, $A = \{x_1, x_2, x_4\}$ ve $B = \{x_1, x_2, x_5\}$ olsun.

$$Y_A = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \{(u_1, 0.2, 0.9), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.5, 0.6)\}) \\ (x_2, \{(u_1, 0.6, 0.2), (u_2, 0.1, 0.8), (u_3, 0.4, 0.7)\}) \\ (x_4, \{(u_1, 0.3, 0.9), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.8, 0.1)\}) \end{array} \right\}$$

ve

$$Y_B = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \{(u_1, 0.8, 0.1), (u_2, 0.3, 0.9), (u_3, 0.4, 0.7)\}) \\ (x_2, \{(u_1, 0.6, 0.3), (u_2, 0.2, 0.9), (u_3, 0.4, 0.8)\}) \\ (x_5, \{(u_1, 0.6, 0.2), (u_2, 0.5, 0.6), (u_3, 0.2, 0.8)\}) \end{array} \right\}$$

CR-bulanık esnek kümelerinin birleşimi,

$$Y_A \cup Y_B = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \{(u_1, 0.8, 0.1), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.5, 0.6)\}) \\ (x_2, \{(u_1, 0.6, 0.2), (u_2, 0.2, 0.8), (u_3, 0.4, 0.7)\}) \\ (x_4, \{(u_1, 0.3, 0.9), (u_2, 0.3, 0.8), (u_3, 0.8, 0.1)\}) \\ (x_5, \{(u_1, 0.6, 0.2), (u_2, 0.5, 0.6), (u_3, 0.2, 0.8)\}) \end{array} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.16. $Y_A, Y_B \in CRFS(U)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır

1. $Y_A \cup Y_A = Y_A$,
2. $Y_A \cup Y_\emptyset = Y_A$,
3. $Y_A \cup Y_{\bar{E}} = Y_{\bar{E}}$,
4. $Y_A \cup Y_B = Y_B \cup Y_A$.

İspat.

1. $\varepsilon_{A \cup A}(x) = \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_A(x)}(u)\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_A(x)}(u)\}) : u \in U\}$
 $= \{(u, \mu_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_A(x)}(u)) : u \in U\}$

$$= \varepsilon_A(x)$$

olduğundan $Y_A \cup Y_A = Y_A$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 2. \varepsilon_{A \cup \emptyset}(x) &= \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_{\emptyset}(x)}(u)\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_{\emptyset}(x)}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), 0\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), 1\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \mu_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_A(x)}(u)) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_A(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Y_A \cup Y_{\emptyset} = Y_A$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 3. \varepsilon_{A \cup \bar{E}}(x) &= \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_{\bar{E}}(x)}(u)\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_{\bar{E}}(x)}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), 1\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), 0\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, 1, 0) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_{\bar{E}}(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Y_A \cup Y_{\bar{E}} = Y_{\bar{E}}$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 4. \varepsilon_{A \cup B}(x) &= \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_B(x)}(u)\}, \min\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_B(x)}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \max\{\mu_{\varepsilon_B(x)}(u), \mu_{\varepsilon_A(x)}(u)\}, \min\{v_{\varepsilon_B(x)}(u), v_{\varepsilon_A(x)}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_{B \cup A}(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Y_A \cup Y_B = Y_B \cup Y_A$ sağlanır.

Tanım 2.17. [26] $Y_A, Y_B \in CRFS(U)$ olmak üzere, Y_A ve Y_B 'nin kesişimi

$$Y_A \cap Y_B = \{x, \varepsilon_{A \cap B}(x) : x \in E\}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\varepsilon_{A \cap B}(x) = \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_B(x)}(u)\}, \max\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_B(x)}(u)\}) : u \in U\} \text{ biçimindedir.}$$

Örnek 2.18. Örnek 2.15 deki Y_A ve Y_B CR-bulanık esnek kümelerinin kesişimi,

$$Y_A \cap Y_B = \{(x_1, \{(u_1, 0.2, 0.9), (u_2, 0.3, 0.9), (u_3, 0.4, 0.7)\}), (x_2, \{(u_1, 0.6, 0.3), (u_2, 0.1, 0.9), (u_3, 0.4, 0.8)\})\}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.19. $Y_A, Y_B \in CRFS(U)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır

1. $Y_A \cap Y_A = Y_A$,
2. $Y_A \cap Y_{\emptyset} = Y_A$,
3. $Y_A \cap Y_{\bar{E}} = Y_{\bar{E}}$,
4. $Y_A \cap Y_B = Y_B \cap Y_A$.

İspat.

$$\begin{aligned} 1. \varepsilon_{A \cap A}(x) &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A(x)}(u), \mu_{\varepsilon_A(x)}(u)\}, \max\{v_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_A(x)}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \mu_{\varepsilon_A(x)}(u), v_{\varepsilon_A(x)}(u)) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_A(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Y_A \cap Y_A = Y_A$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 2. \varepsilon_{A \cap \emptyset}(x) &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A}(u), \mu_{\varepsilon_{\emptyset}}(u)\}, \max\{v_{\varepsilon_A}(u), v_{\varepsilon_{\emptyset}}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A}(u), 0\}, \max\{v_{\varepsilon_A}(u), 1\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, 0, 1) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_{\emptyset}(x) \text{ olduğundan} \end{aligned}$$

$Y_A \cap Y_{\emptyset} = Y_{\emptyset}$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 3. \varepsilon_{A \cap \bar{E}}(x) &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A}(u), \mu_{\varepsilon_{\bar{E}}}(u)\}, \max\{v_{\varepsilon_A}(u), v_{\varepsilon_{\bar{E}}}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A}(u), 1\}, \max\{v_{\varepsilon_A}(u), 0\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \mu_{\varepsilon_A}(u), v_{\varepsilon_A}(u)) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_A(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Y_A \cap Y_{\bar{E}} = Y_A$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 4. \varepsilon_{A \cap B}(x) &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_A}(u), \mu_{\varepsilon_B}(u)\}, \max\{v_{\varepsilon_A}(u), v_{\varepsilon_B}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \{(u, \min\{\mu_{\varepsilon_B}(u), \mu_{\varepsilon_A}(u)\}, \max\{v_{\varepsilon_B}(u), v_{\varepsilon_A}(u)\}) : u \in U\} \\ &= \varepsilon_{B \cap A}(x) \end{aligned}$$

olduğundan $Y_A \cap Y_B = Y_B \cap Y_A$ sağlanır.

Teorem 2.20. [26] $Y_A, Y_B \in CRFS(U)$ olmak üzere

1. $(Y_A \cup Y_B)^c = Y_A^c \cap Y_B^c$
2. $(Y_A \cap Y_B)^c = Y_A^c \cup Y_B^c$

eşitlikleri vardır.

Teorem 2.21. [26] $Y_A, Y_B \in CRFS(U)$ olmak üzere

1. $Y_A \cup (Y_B \cap Y_C) = (Y_A \cup Y_B) \cap (Y_A \cup Y_C)$
2. $Y_A \cap (Y_B \cup Y_C) = (Y_A \cap Y_B) \cup (Y_A \cap Y_C)$

eşitlikleri vardır.

3. CR-BULANIK ESNEK KÜMELERİN KARAR VERME PROBLEMLERİNE BİR UYGULAMASI

Bu bölümde, verilen bir karar verme probleminin çözümünde CR-bulanık esnek kümeleri kullanan bir algoritma tanıtılmıştır. Özellikle verilerin sezgisel bulanık standartlarına uymadığı ancak CR-bulanık küme mantığına uygun problemler için bu yöntem oldukça kullanışlıdır.

3.1 CR-Bulanık Esnek Toplam Operatörü

Tanım 3.1.1 $Y_A \in CRFS(U)$ olmak üzere Y_A 'nın kardinal kümesi cY_A ile gösterilsin.

$$cY_A = \{(x, \mu_{cY_A}(x), v_{cY_A}(x)) : x \in E\}$$

olarak tanımlanan E üzerinde bir CR-bulanık kümedir. Burada, $\mu_{cY_A}(x)$, x 'in cY_A 'ya üye olma ve $v_{cY_A}(x)$ ise x 'in cY_A 'ya üye olmama derecesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\mu_{cY_A}(x): E \rightarrow [0,1], \quad \mu_{cY_A}(x) &= \frac{\sum_{u \in U} \mu_{Y_A(x)}(u)}{|U|} \\ \nu_{cY_A}(x): E \rightarrow [0,1], \quad \nu_{cY_A}(x) &= \frac{\sum_{u \in U} \nu_{Y_A(x)}(u)}{|U|}\end{aligned}$$

Burada $|U|$, U evrensel kümesinin kardinalitesini göstermektedir. Bu şekilde elde edilen cY_A kümelerinin ailesi $cCRF(U)$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1.2. $Y_A \in CRFS(U)$ ve $cY_A \in cCRF(U)$ olmak üzere toplam operatörü Y_{tp} ,

$$Y_{tp}: cCRF(U) \times CRFS(U) \rightarrow CRF(U), \quad Y_{tp}(cY_A, Y_A) = Y_A^*$$

ile tanımlanır. Burada,

$$Y_A^* = \left\{ (u, \mu_{Y_A^*}(u), \nu_{Y_A^*}(u)) : u \in U \right\}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_{Y_A^*}(u): U \rightarrow [0,1], \quad \mu_{Y_A^*}(u) &= \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu_{cY_A}(x) \mu_{Y_A(x)}(u) \\ \nu_{Y_A^*}(u): U \rightarrow [0,1], \quad \nu_{Y_A^*}(u) &= \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \nu_{cY_A}(x) \nu_{Y_A(x)}(u)\end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca $|E|$, E kümesinin kardinalitesidir.

3.2. Karar Verme Algoritması

1. Adım: U evrensel kümesi ve $A \subseteq E$ istenilen parametre kümesi oluşturulur.

2. Adım: Y_A , CR-bulanık esnek kümesi oluşturulur.

3. Adım: cY_A kardinal kümesi bulunur.

4. Adım: Y_{tp} toplam operatörü yardımıyla Y_A^* kümesi bulunur.

5. Adım: $v_1 = \max\{\mu_{Y_A^*}(u) : u \in U\}$ ve $v_2 = \min\{\nu_{Y_A^*}(u) : u \in U\}$ hesaplanır.

6. Adım: $\gamma, \theta \in [0,1]$ olmak üzere $(\varsigma, v_1, \gamma) \in Y_A^*$ ve $(v, \theta, v_2) \in Y_A^*$ elemanları bulunur.

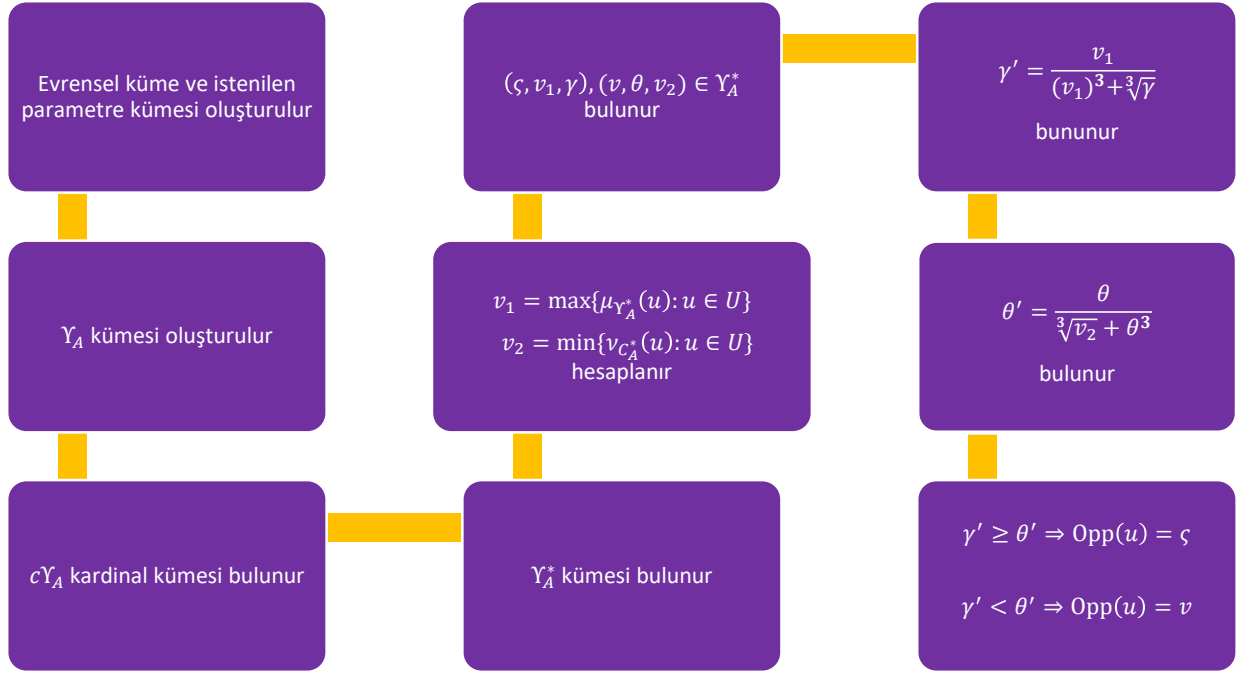
7. Adım: $\gamma' = \frac{v_1}{(v_1)^3 + \sqrt[3]{\gamma}}$, $\theta' = \frac{\theta}{\sqrt[3]{v_2 + \theta^3}}$ değerleri hesaplanır.

8. Adım: Parametrelere en uygun seçenek $\text{Opp}(u)$ ile gösterilmek üzere

$$\text{Opp}(u) = \begin{cases} \varsigma & \gamma' \geq \theta' \\ v & \gamma' < \theta' \end{cases}$$

olarak bulunur.

Aşağıda algoritmaya ait bir akış şeması verilmiştir.



3.3. Açıklayıcı Örnek

Problem: Belli bir alanda yapılan Ar-Ge projesinde hem araştırmacı hem de bursiyer olarak mülakatla bir lisans mezunu öğrenci alınacaktır. Başvuru yapan adayların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ile gösterilsin. Seçim komitesi bir dizi parametreyi dikkate almaktadır. Parametre kümesi $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ şeklinde olup $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere x_i parametreleri sırasıyla “diploma notu”, “adayın yaşı”, “deneyim”, “grup çalışmasına yatkınlık” ve “problem çözme yeteneği” ni belirtmektedir.

Seçim komitesinde yapılan ciddi görüşmeler sonucunda her aday, E kümesinin seçilen $A = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ alt kümesine göre değerlendirilecektir.

1. Adım: $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve $A = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ kümeleri belirlenmiştir.
2. Adım: Seçim komitesi, Y_A CR-bulanık esnek kümesini aşağıdaki şekilde belirlemiştir.

$$Y_A = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \{(u_1, 0.4, 0.8), (u_2, 0.8, 0.1), (u_3, 0.7, 0.2), (u_4, 0.6, 0.2)\}) \\ (x_3, \{(u_1, 0.3, 0.3), (u_2, 0.3, 0.9), (u_3, 0.7, 0.3), (u_4, 0.4, 0.3)\}) \\ (x_4, \{(u_1, 0.7, 0.2), (u_2, 0.5, 0.3), (u_3, 0.6, 0.4), (u_4, 0.6, 0.1)\}) \\ (x_5, \{(u_1, 0.5, 0.1), (u_2, 0.7, 0.4), (u_3, 0.5, 0.3), (u_4, 0.6, 0.3)\}) \end{array} \right\}$$

3. Adım:

$$\mu_{cY_A}(x_1) = \frac{0.4 + 0.8 + 0.7 + 0.6}{4} = 0.625 \quad \text{ve} \quad v_{cY_A}(x_1) = \frac{0.8 + 0.1 + 0.2 + 0.2}{4} = 0.325$$

olup benzer şekilde

$$\begin{aligned}\mu_{cY_A}(x_3) &= 0.425 & \nu_{cY_A}(x_3) &= 0.45 \\ \mu_{cY_A}(x_4) &= 0.6 & \nu_{cY_A}(x_4) &= 0.25 \\ \mu_{cY_A}(x_5) &= 0.575 & \nu_{cY_A}(x_5) &= 0.275\end{aligned}$$

değerleri hesaplanır. O halde cY_A kardinal kümesi aşağıdaki şekildedir:

$$cY_A = \{(x_1, 0.625, 0.325), (x_3, 0.425, 0.45), (x_4, 0.6, 0.25), (x_5, 0.575, 0.275)\}.$$

3.Adım:

$$\begin{aligned}\mu_{Y_A^*}(u_1) &= \frac{1}{5} \left((\mu_{cY_A}(x_1)\mu_{Y_A(x_1)}(u_1)) + (\mu_{cY_A}(x_3)\mu_{Y_A(x_3)}(u_1)) + (\mu_{cY_A}(x_4)\mu_{Y_A(x_4)}(u_1)) \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{cY_A}(x_5)\mu_{Y_A(x_5)}(u_1)) \right) \\ &= \frac{1}{5} (0.25 + 0.1275 + 0.42 + 0.2875) = 0.217\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{Y_A^*}(u_1) &= \frac{1}{5} \left((\nu_{cY_A}(x_1)\nu_{Y_A(x_1)}(u_1)) + (\nu_{cY_A}(x_3)\nu_{Y_A(x_3)}(u_1)) + (\nu_{cY_A}(x_4)\nu_{Y_A(x_4)}(u_1)) \right. \\ &\quad \left. + (\nu_{cY_A}(x_5)\nu_{Y_A(x_5)}(u_1)) \right) \\ &= \frac{1}{5} (0.26 + 0.135 + 0.05 + 0.0275) = 0.0945\end{aligned}$$

olup benzer şekilde

$$\begin{aligned}\mu_{Y_A^*}(u_2) &= 0.216 & \nu_{Y_A^*}(u_2) &= 0.1245 \\ \mu_{Y_A^*}(u_3) &= 0.2765 & \nu_{Y_A^*}(u_3) &= 0.0765 \\ \mu_{Y_A^*}(u_4) &= 0.25 & \nu_{Y_A^*}(u_4) &= 0.0615\end{aligned}$$

hesaplanır. Böylece Y_A^* kümesi,

$$Y_A^* = \{(u_1, 0.217, 0.0945), (u_2, 0.216, 0.1245), (u_3, 0.2765, 0.0765), (u_4, 0.25, 0.0615)\}$$

şeklinde olur.

$$5. \text{ Adım: } v_1 = \max\{\mu_{Y_A^*}(u): u \in U\} = 0.2765 \text{ ve } v_2 = \min\{\nu_{Y_A^*}(u): u \in U\} = 0.0615.$$

$$6. \text{ Adım: } (u_3, 0.2765, 0.0765), (u_4, 0.25, 0.0615) \in Y_A^*$$

$$7. \text{ Adım: } \gamma' = \frac{0.2765}{(0.2765)^3 + \sqrt[3]{0.0765}} = 0.62044444 \text{ ve } \theta' = \frac{0.25}{\sqrt[3]{0.0615} + (0.25)^3} = 0.609239969$$

$$8. \text{ Adım: } \gamma' \geq \theta' \text{ olduğu için } \text{Opp}(u) = u_3 \text{ 'tür.}$$

Yani seçim komitesinin belirlediği şartlar altında proje için en uygun aday u_3 'tür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, [26]'da verilen CR-bulanık esnek küme kavramı üzerinde bazı küme işlemleri tanıtılmış ve verilen örnekler ile konunun anlaşılabilirliği artırılmıştır. Daha sonra bir aday belirleme problemi için CR-bulanık esnek kümeyi kullanan bir algoritma tanıtılmış ve problemin çözümüne ulaşılmıştır. Bu problemde dikkat edilecek olursa seçim komitesinin belirlediği Y_A kümesi CR-bulanık esnek bir küme olup sezgisel bulanık esnek kümeden farklıdır. Çünkü komitenin belirleyeceği şartlara göre üye olma ve üye olmama değerlerinin toplamı her zaman 1'den küçük eşit olmak zorunda değildir. Bu gibi durumlarda sezgisel bulanık esnek kümeleri kullanan algoritmalar çözüm sağlayamaz ancak yukarıda önerilen algoritmanın kullanılması problemin çözümü için oldukça faydalıdır. Böylece karşılaşılan çok çeşitli karar verme-belirsizlik problemleri için CR-bulanık esnek kümelerin daha verimli karar verme süreçleri oluşturmaya önemli katkı sağladığı görülmüştür.

Bunlara rağmen üye olma ve üye olmama değerlerinin toplamı 1'den büyük olsa da CR-bulanık esnek kümelerin çözüm sağlayamadığı kısıtlı problemler karşımıza çıkabilir. Bunun için gelecek çalışmalarda, CR-bulanık esnek matrisler tanımlanarak topolojik ve cebirsel yapısı incelenebilir, mesafe ve benzerlik ölçüleri araştırılabilir. Ayrıca, seçim komitesinin kriterlerini daha fazla detaylandırarak ideale yakın çözüm elde etmek için bulanık parametrelili veya sezgisel bulanık parametrelili CR-bulanık esnek küme kavramları tanıtılarak yapılan araştırmalara katkı sağlanabilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında “CR Bulanık Esnek Kümeler ve Uygulamaları” isimli devam eden yüksek lisans tezinden türetilmiştir. Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs programı kapsamında desteklenmiştir. Katkıları için TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

YAZAR KATKI ORANLARI

Ferhan Şola Erduran: Metodoloji, İçerik analizi, Araştırma, Makalenin yazımı-Orijinal taslak, Makalenin yazımı-İnceleme ve Düzenleme. **Yaren Münüsoğlu:** İçerik analizi, Araştırma, Makalenin yazımı-Orijinal taslak.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.
- [2] Chang, C. L. (1968). Fuzzy topological space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24, 182-190.
- [3] Kramosil, O. ve Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11, 326-334.
- [4] Lowen, R. (1976). Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621-633.
- [5] Pao-Ming, P. and Ying-Ming, L. (1980). Fuzzy topology: II. Product and Quotient Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 77, 20-37.
- [6] George, A. and Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64, 395-399.
- [7] Gregori, V., Morillas, S. and Sapena, A. (2011). Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170, 95-111.
- [8] Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and System*, 20, 87-96.
- [9] Yager, R.R. (2013). Pythagorean fuzzy subsets. *Proceeding Joint IFSA World Congress NAFIPS Annual Meeting*, Canada, 57-61.
- [10] Garg, H. (2017). A new improved score function of an interval-valued pythagorean fuzzy set based TOPSIS method. *International Journal for UncertaintyQuantification*, 7, 463-474.

- [11] Ibrahim, H. Z., Al-shami, T. M. and Elbarbary O.G. (2021). (3,2)-Fuzzy sets and their applications to topology and optimal choices. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2021, 14 pages.
- [12] Cuong, B.C. (2014) Picture fuzzy sets. *Journal of Computer Science and Cybernetics*, 30, 409–420.
- [13] Memiş, S. (2021) A study on picture fuzzy sets. In *Proceedings of the 7th IFS and Contemporary Mathematics Conference*, Mersin, Türkiye, 125–132.
- [14] Senapati, T. ve Yager, R.R. (2020). Fermatean fuzzy sets. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 11, 663-674.
- [15] Al-Shami, T., Ibrahim, H.Z., Azzam, A.A. and El-Maghrabi, A.I. (2022). SR-Fuzzy sets and sheir weighted aggregated operators in application to decision-making. *Journal of Function Spaces*, 2022, 14 pages.
- [16] Salih, Y. and Ibrahim, H.Z. (2023). CR-Fuzzy sets and their application. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 28. 171-181.
- [17] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- [18] Maji, P.K., Biswas R. and Roy, A.R. (2001) Intuitionistic fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 677-692.
- [19] Deli İ., Çağman N. (2015). Intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making. *Applied Soft Computing*, 28, 109-113.
- [20] El-Yagubi E., Salleh A.R. (2013). Intuitionistic fuzzy parameterized fuzzy soft set. *Journal of Quality Measurement and Analysis*, 9, 73-81.
- [21] Sulukan E., Çağman N., Aydın T. (2019). Fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their application to a performance-based value assignment problem. *Journal of New Theory*, 29, 79-88.
- [22] Karaaslan, F. (2016). Intuitionistic fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets with applications in decision making. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 11, 607-619.
- [23] Aydın, T. and Enginoğlu, S. (2021). Interval-valued intuitionistic fuzzy parameterized interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their application in decision-making. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 12(1), 1541-1558.
- [24] Memiş, S. (2023). Picture fuzzy soft matrices and application of their distance measures to supervised learning: picture fuzzy soft k-nearest neighbor (PFS-kNN). *Electronics*, 12(19), 4129.
- [25] Memiş, S. (2023). Picture fuzzy parameterized picture fuzzy soft sets and their application in a performance-based value assignment problem to salt-and-pepper noise removal filters. *International Journal of Fuzzy Systems*, 25(7), 2860-2875.
- [26] Şola Erduran, F. and Münüsoğlu, Y. (2023). CR-Fuzzy Soft Sets and Applications, *Western Balkan Conference in Mathematics and Applications*, Prishtine. Kosovo, 48-56.
- [27] Çağman, N., Enginoğlu, S. (2010). Soft Set Theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 848-855.