

Ayrık Topolojik Bir Grafın M-Polinomu ve Bazı Topolojik İndeksleri

Hatice Çoban Eroğlu 

Doğuş Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Yazılım Mühendisliği Bölümü, 34775, İstanbul, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Bu çalışmada ayrık topolojik bir grafın özellikleri incelenmiştir.
- Ayrık topolojik graf örnekleri sunulmuştur.
- Ayrık topolojik bir grafın M-polinomu için genel bir formül verilmiştir.
- Ayrık topolojik bir grafın M-polinomu kullanılarak derece tabanlı bazı indeks hesapları yapılmıştır.

Makale Bilgileri

Geliş: 04/11/2024

Kabul: 06/01/2025

Anahtar Kelimeler

Ayrık topolojik graf,
M-polinomu,
Zagreb indeksleri.

Öz

Bu makalede, n elemanlı bir X kümesi tarafından oluşturulan ve G olarak adlandırılan ayrık topolojik bir graf ele alınmaktadır. Bu makale G grafının bazı özelliklerini tartışmakta ve n elemanlı bir X kümesi tarafından oluşturulan G grafının M-polinomu için genel bir formül sunmaktadır. Ayrıca, M-polinomu yardımıyla G grafının birinci ve ikinci Zagreb indeksleri olarak adlandırılan derece tabanlı topolojik indeksleri hesaplanmaktadır.

M-Polynomial and Some Topological Indices of a Discrete Topological Graph

Highlights

- In this study, the properties of a discrete topological graph are investigated.
- Examples of discrete topological graphs are presented.
- A general formula for the M-polynomial of a discrete topological graph is given.
- Some degree based index calculations are made using the M-polynomial of a discrete topological graph.

Article Info

Received: 04/11/2024

Accepted: 06/01/2025

Keywords

Discrete topological
graph,
M-polynomial,
Zagreb indices.

Abstract

In this paper, we consider a discrete topological graph, designated as G generated by a set X containing n elements. This paper discusses some properties of the graph G and presents a general formula for the M-polynomial of the graph G generated by a set X with n elements. Furthermore, we compute some degree based topological indices, namely the first and second Zagreb indices of the graph G with the help of the M-polynomial.

GİRİŞ

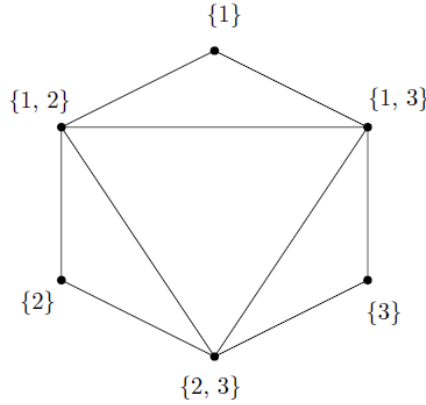
Graf teorisi kimya, mühendislik ve hatta dilbilimsel analiz de dâhil olmak üzere çok çeşitli konularda önemli matematiksel bir araçtır [1]. Sorunları çözmek, gizli örüntüleri ortaya çıkarmak ve farklı alanlarda inovasyonu teşvik etmek için kullanılan bir yöntemdir. Önemi etrafımızdaki birbirine bağlı dünyayı anlama ve analiz etme yeteneğinde yatmaktadır. Farklı nesneler veya kavramlar arasındaki bağlantıları ve etkileşimleri analiz etmek için nokta ve kenarlardan oluşan graf adı verilen matematiksel modelleri kullanır [2-5]. Bir grafın M-polinomu, çeşitli derece tabanlı topolojik indekslerin hesaplanmasında etkin bir rol oynadığı graf teorisinde önemli bir araçtır [6, 7]. Bu derece tabanlı indeksler, grafların yapısal özelliklerini ölçmek için kullanılan sayısal parametrelerdir. M-polinomu, grafın yapısı ile çeşitli topolojik indeksler arasında bir köprü görevi görerek birinci ve ikinci Zagreb indekslerinin verimli bir şekilde hesaplanmasını sağlar [8]. Ayırık topolojik bir graf, X kümesi üzerinde X 'in tüm alt kümelerin açık olduğu ayırık topolojiden yararlanarak oluşturulur [9-11]. Ayırık topolojik bir graf oluşturmak için boş küme ve tüm X kümesi hariç bütün açık alt kümeler nokta olarak kabul edilir ve noktaların ortak elemanları varsa bir kenarla bağlanırlar.

Bu çalışmada grafların basit, sonlu ve yönsüz olduğu kabul edilmiştir. Bu çalışmanın amacı, n elemanlı bir küme tarafından oluşturulan ayırık topolojik bir grafın M-polinomunun nasıl hesaplanacağını göstermek ve M-polinomu yardımıyla grafın derece tabanlı bazı topolojik indekslerini hesaplamaktır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 2.1. [12] X boş olmayan bir küme olsun. Ayırık topolojik bir graf G 'nin nokta kümesi olan $V(G)$ kümesi; τ , X üzerinde ayırık bir topoloji olmak üzere $\tau \setminus \{\emptyset, X\}$ elemanlarından oluşur. G 'nin kenar kümesi aşağıdaki (Şekil 1) gibidir:

$$E(G) = \{e: uv \mid u \cap v \neq \emptyset, \quad u \neq v, \quad u, v \in V(G)\}.$$



Şekil 1. $X = \{1, 2, 3\}$ üzerindeki ayırık topolojik graf.

Önerme 2.1. G , n elemanlı bir X kümesi üzerinde ayırık topolojik bir graf olsun. Bu durumda G grafının nokta sayısı $2^n - 2$ 'dir, yani $|V(G)| = 2^n - 2$.

3. BULGULAR

3.1. Ayırık Topolojik Bir Grafın Bazı Özellikleri

Tanım 3.1. G , $X = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde ayırık topolojik bir graf olsun. G 'nin bir noktası X kümesinden j tane eleman içeriyorsa j -uzunluğunda bir nokta olarak adlandırılır.

Lemma 3.1. $G, X = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun ve v_j , j -uzunluğundaki noktaları temsil eden bir küme olsun. Bu durumda v_j kümesindeki noktaların derecesi $|V(G)| - 2^{n-j} = 2^n - 2 - 2^{n-j}$ ile hesaplanır. Ayrıca j -uzunluğundaki noktaların toplam sayısı $|v_j| = \binom{n}{j}$ ve eğer $j + k = n$ ise $|v_j| = |v_k|$ olur.

İspat. G grafının $X = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış ayrık topolojik bir graf olduğunu kabul edelim. Grafta bulunan bir noktanın derecesi o noktaya bir kenar ile bağlı olan noktaların sayısına eşittir [5]. G grafından j -uzunluğunda bir nokta alalım, $1 \leq j \leq n - 1$ ve buna u diyelim. u noktasının derecesini belirlemek için, u 'ya komşu olmayan noktaları yani u ile ortak kenarı bulunmayan noktaları grafın nokta kümesinden çıkaracağız. u ile ortak elemana sahip olmayan noktaların sayısı 2^{n-j} olduğundan u noktasının derecesi $|V(G)| - 2^{n-j} = 2^n - 2 - 2^{n-j}$ olarak bulunur.

Lemma 3.2. X, n eleman içeren bir küme olsun. X üzerinde tanımlı ayrık topolojik bir graf olan G 'nin kenar sayısı aşağıdaki gibidir:

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (2^n - 2 - 2^{n-j}) \right].$$

İspat. $G, X = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun. G 'nin kenar sayısını hesaplamak için Lemma 3.1'den yararlanacağız. Bir noktanın derecesi o noktadan geçen kenarların sayısına eşittir. j -uzunluğundaki noktaların toplam sayısı $\binom{n}{j}$ ve j -uzunluğundaki noktaların derecesi Lemma 3.1'de bahsedildiği gibi $2^n - 2 - 2^{n-j}$ 'dir. Dolayısıyla G 'nin kenar sayısı aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (2^n - 2 - 2^{n-j}) \right].$$

Toplamanın sadece yarısını alma kararının arkasındaki mantığın, her kenarın sadece bir kez sayılmasını sağlamak olduğu unutulmamalıdır.

Açıklık getirmek amacıyla, ayrık topolojik bir graf örneği veriyoruz:

Örnek 3.1. $X = \{1, 2, 3\}$ olsun. Bu küme üzerinde tanımlanmış ayrık topolojik bir graf olan G 'nin nokta kümesi $V(G) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ şeklindedir. Burada $\{1\}, \{2\}$ ve $\{3\}$ noktaları 1-uzunluğunda ve $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ ve $\{2, 3\}$ noktaları 2-uzunluğunda olan noktalardır. Ayrıca Şekil 1'den de görülebileceği gibi $\{1, 2\}$ ve $\{1, 3\}$ noktaları bir kenar yardımıyla birbirine bağlıdır çünkü $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$, yani iki noktanın kesişimi boş değildir. Lemma 3.2 yardımıyla kenar sayısını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$n = |X| = 3 \text{ olduğundan } |E(G)| = \frac{1}{2} \left[\binom{3}{1} (2^3 - 2 - 2^2) + \binom{3}{2} (2^3 - 2 - 2) \right] = 9.$$

Bu sonuç Şekil 1 ile doğrulanabilir.

3.2. Bir Grafın M-Polinomu

Bu bölümde, ayrık topolojik bir grafın M-polinomunu hesaplamak için genel bir formül vereceğiz. Bu bölüme herhangi bir grafın M-polinomunu tanımlayarak başlayacağız.

Tanım 3.2. [7] G bir graf olsun ve m_{ij} , u ile v noktaları arasındaki kenar sayısını göstereyin, öyle ki $\deg(u) = i$ ve $\deg(v) = j$. Bu durumda G 'nin M-polinomu aşağıdaki gibi verilir:

$$M(G, x, y) = \sum_{\delta \leq i \leq j \leq \Delta} m_{ij} x^i y^j,$$

burada δ noktaların en düşük derecesini ve Δ noktaların en yüksek derecesini göstermektedir.

Aşağıdaki teorem ile ayrık topolojik bir grafın M-polinomunu hesaplamak için genel bir formül vereceğiz.

Teorem 3.1. G , n elemanlı bir X kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun ve v_j j - uzunluğundaki noktaların kümesini temsil etsin.

$\delta = \deg(v_1) < \deg(v_2) < \dots < \deg(v_{n-1}) = \Delta$, öyle ki $\deg(v_j) = i_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 'dir. Bu durumda G grafının M-polinomu aşağıdaki gibidir ve belirtilen şartları sağlar.

$$M(G, x, y) = \sum_{\delta \leq i_j \leq i_k \leq \Delta} m_{i_j i_k} x^{i_j} y^{i_k},$$

öyle ki $1 \leq j \leq k \leq n-1$.

• $j = k = 1$ ise $m_{i_1 i_1} = m_{\delta \delta} = 0$.

• $j = k$ ise $m_{i_j i_j} = \frac{1}{2} \left[\binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1 \right) \right]$.

• $j = k$ ve $n-j < j$ ise $m_{i_j i_j} = \frac{1}{2} \left[\binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - 1 \right) \right]$.

• $j < k$ ise $m_{i_j i_k} = \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} \right)$.

• $j < k$ ve $n-j < k$ ise $m_{i_j i_k} = \binom{n}{j} \binom{n}{k}$.

Ayrıca toplam kenar sayısı $m_{i_j i_k} \frac{n(n-1)}{2}$ dir.

İspat. $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ve G de X kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun. Toplam kenar sayısı $m_{i_j i_k}$, j ve k 'nin birbirine göre durumlarına bağlı olduğundan ispatı bu durumlara bağlı olarak 5 adımda inceleyeceğiz.

1. Durum: 1-uzunluğundaki noktaları göz önüne alalım. Bu noktalar $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ 'dir. Bu noktalar arasında kenar olmadığından $m_{i_1 i_1} = 0$ 'dır, burada i_1 , 1- uzunluğundaki noktaların derecesidir.

2. Durum: $j = k$ olsun. j -uzunluğundaki noktaların toplam sayısı $\binom{n}{j}$ 'dir. Şimdi, j -uzunluğunda bir nokta seçelim ve buna u diyelim. Daha sonra u ile j -uzunluğundaki noktalar arasındaki kenarların sayısını belirleyelim. Doğru bir toplam elde etmek için, u noktasına bir kenarla bağlı olmayan tüm noktaları değerlendirme dışı bırakıyoruz. Bu nedenle, u ile j -uzunluğundaki noktalar arasındaki kenarların sayısı $\left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1\right)$ olur. Bu hesaplamayı j -uzunluğundaki tüm noktalar için yaptığımızda bulunan toplam sayı $\left[\binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1\right)\right]$ olur. Bu formülde, aynı kenarların iki kez sayıldığına dikkat edilmelidir; bu nedenle sonuç ikiye bölünür. Aynı dereceye sahip noktalar arasındaki kenar sayısının nihai sonucu $\frac{1}{2} \left[\binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1\right)\right]$ olarak bulunur.

3. Durum: $j = k$ ve $n - j < j$ olsun. j -uzunluğundaki noktaların toplam sayısı $\binom{n}{j}$ ve k -uzunluğundaki noktaların toplam sayısı $\binom{n}{k}$ 'dir; fakat $j = k$ ve aynı noktalar arasında bir kenar bulunmayacağından k -uzunluğundaki noktaların toplam sayısını $\binom{n}{k} - 1$ olarak değerlendireceğiz. Dolayısıyla bu noktalar arasındaki toplam kenar sayısı $\frac{1}{2} \left[\binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - 1\right)\right]$ olarak bulunur.

4. Durum: $j < k$ olsun. j -uzunluğunda bir nokta seçelim ve buna v diyelim. v noktasının j elemanının hiçbirini içermeyen k -uzunluğundaki noktaların sayısı $\binom{n-j}{k}$ 'dir. Bu değerin hariç tutulmasıyla k -uzunluğundaki noktaların toplam sayısı $\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k}$ olarak bulunur. Bu durumda j -uzunluğundaki noktalarla k -uzunluğundaki noktalar arasındaki kenar sayısı $\binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k}\right)$ olur.

5. Durum: $j < k$ ve $n - j < k$ olsun. 3. Durum'da kullanılan metodolojinin aynısı burada da uygulanmaktadır. Ancak bu durumda, j -uzunluğundaki bir nokta ile k -uzunluğundaki bir nokta arasında her zaman bir kenar vardır. Bu durumda toplam kenar sayısı $\binom{n}{j} \binom{n}{k}$ olur.

3.3. Noktaların Derecesini Kullanarak G'nin İndekslerini Hesaplama

Bu bölümde, n elemanlı X kümesi tarafından oluşturulan ayrık topolojik bir graf G 'nin bazı derece tabanlı topolojik indekslerini hesaplıyoruz. G 'nin M-polinomunun x ve y 'ye göre türevini veya integralini alarak çeşitli derece tabanlı topolojik indeksler elde etmek mümkündür [13].

$$M_1(G)(x, y) = (D_x + D_y)(M(G, x, y)),$$

$$M_2(G)(x, y) = (D_x D_y)(M(G, x, y)),$$

$$SDD(G)(x, y) = (D_x S_y + D_y S_x)(M(G, x, y)),$$

burada D_x, D_y, S_x ve S_y aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
D_x(M(G, x, y)) &= x \times \frac{\partial(M(G, x, y))}{\partial x}, \\
D_y(M(G, x, y)) &= y \times \frac{\partial(M(G, x, y))}{\partial y}, \\
S_x(M(G, x, y)) &= \int \frac{M(G, x, y)}{x} dx, \\
S_y(M(G, x, y)) &= \int \frac{M(G, x, y)}{y} dy.
\end{aligned}$$

Teorem 3.2. G , n elemanlı bir X kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
M_1(G)(1, 1) &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (i_j + i_k) m_{i_j i_k}, \\
M_2(G)(1, 1) &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (i_j i_k) m_{i_j i_k}, \\
SDD(G)(1, 1) &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{i_j}{i_k} + \frac{i_k}{i_j} \right) m_{i_j i_k},
\end{aligned}$$

burada $m_{i_j i_k}$ Teorem 3.1’de tanımlandığı gibidir.

İspat. G ’nin, n elemanlı bir X kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olduğunu kabul edelim. $M_1(G)(x, y)$ ifadesi $(D_x + D_y)(M(G, x, y))$ olarak tanımlanmaktadır [7]. $M_1(G)(x, y)$ değerini $(x, y) = (1, 1)$ için hesaplayacağız. G ’nin M -polinomunun aşağıdaki gibi olduğunu Teorem 3.1’de söylemiştik.

$$M(G, x, y) = \sum_{\delta \leq i_j \leq i_k \leq \Delta} m_{i_j i_k} x^{i_j} y^{i_k}.$$

Burada $M(G, x, y)$ ifadesine $(D_x + D_y)$ operatörünü uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$(D_x + D_y)(M(G, x, y)) = \sum_{\delta \leq i_j \leq i_k \leq \Delta} (i_j + i_k) m_{i_j i_k} x^{i_j} y^{i_k},$$

ve böylece

$$(D_x + D_y)(M(G, x, y))(1, 1) = \sum_{\delta \leq i_j \leq i_k \leq \Delta} (i_j + i_k) m_{i_j i_k}$$

olur. Burada i_j , j -uzunluğundaki noktaların derecesini ve i_k da k -uzunluğundaki noktaların derecesini göstermektedir. Lemma 3.1’den $i_j = 2^n - 2 - 2^{n-j}$ ve $i_k = 2^n - 2 - 2^{n-k}$ olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla aşağıdaki sonuçları yazabiliriz:

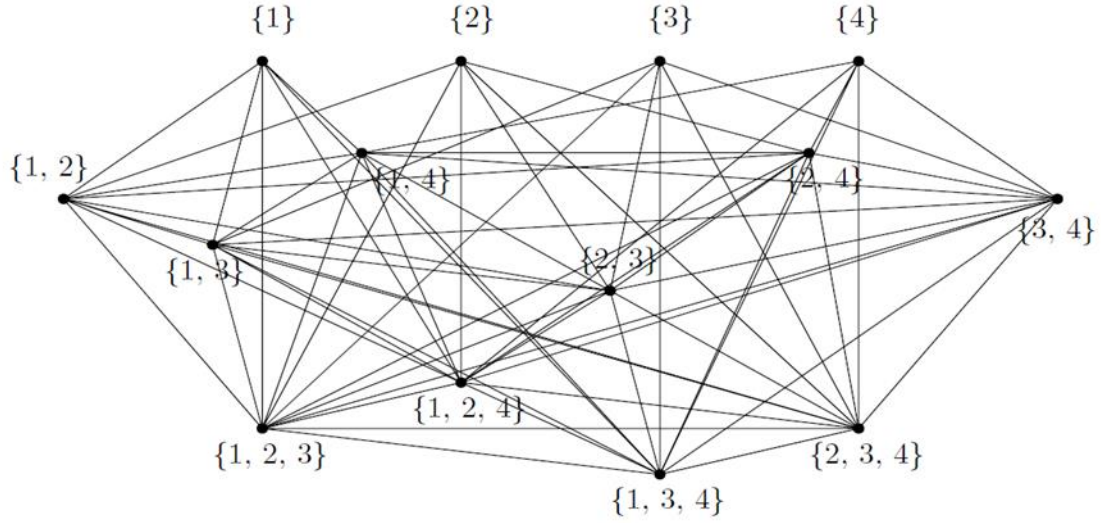
$$M_1(G)(1, 1) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (i_j + i_k) m_{i_j i_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (2^n - 2 - 2^{n-j} + 2^n - 2 - 2^{n-k}) m_{i_j i_k},$$

$$M_2(G)(1, 1) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (i_j i_k) m_{i_j i_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (2^n - 2 - 2^{n-j})(2^n - 2 - 2^{n-k}) m_{i_j i_k}.$$

$$SDD(G)(1, 1) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{i_j}{i_k} + \frac{i_k}{i_j} \right) m_{i_j i_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2^n - 2 - 2^{n-j}}{2^n - 2 - 2^{n-k}} + \frac{2^n - 2 - 2^{n-k}}{2^n - 2 - 2^{n-j}} \right) m_{i_j i_k}.$$

Örnek 3.2. G , $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun (Şekil 2). Aşağıdaki ifadelerin geçerliliği Teorem 3.2 nin uygulanması yoluyla kanıtlanabilir.

$M_1(G)(1, 1) = 1320$, $M_2(G)(1, 1) = 6528$, ve $SDD(G)(1, 1) = 148$.



Şekil 2. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ üzerindeki ayrık topolojik graf.

Bir G grafının birinci ve ikinci Zagreb indeksleri aşağıdaki gibi tanımlanır [8]:

$$M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} d(u) + d(v)$$

ve

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v).$$

Aşağıdaki teorem, dereceye dayalı indekslerin, özellikle de ayrık topolojik bir grafın birinci ve ikinci Zagreb indekslerinin nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

Teorem 3.3. G , n elemanlı bir X kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun. G 'nin birinci ve ikinci Zagreb indeksleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

• $j < k$ olduğunda

$$(M_1(G))_1 = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} \right) (i_j + i_k),$$

eğer $n - j < k$ ise $\binom{n-j}{k} = 0$.

• $j = k$ olduğunda

$$(M_1(G))_2 = \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1 \right) (i_j),$$

eğer $n - j < j$ ise $\binom{n-j}{j} = 0$.

$$M_1(G) = (M_1(G))_1 + (M_1(G))_2.$$

Birden fazla durumda kenarların sayılmasından kaçınmak için $j > k$ durumunun dikkate alınmadığına dikkat edilmelidir.

$j < k$ olduğunda,

$$(M_2(G))_1 = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} \right) (i_j i_k),$$

eğer $n - j < k$ ise $\binom{n-j}{k} = 0$.

$j = k$ olduğunda,

$$(M_2(G))_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1 \right) (i_j)^2,$$

ve eğer $n - j < j$ ise $\binom{n-j}{j} = 0$.

$$M_2(G) = (M_2(G))_1 + (M_2(G))_2.$$

İspat. $M_1(G)$ ve $M_2(G)$ 'yi hesaplamak için öncelikle nokta sayısını ve her bir noktanın derecesini belirlemek gerekir. Teorem 3.1'in ispatında gösterildiği gibi, $j < k$ olduğu durumda, j -uzunluğunda bir nokta seçilir ve bu nokta ile tüm k -uzunluğundaki noktalar arasındaki kenar sayısı hesaplanır.

j -uzunluğundaki noktaların sayısı $\binom{n}{j}$ iken j -uzunluğundaki noktalar ile arasında kenar bulunan k -uzunluğundaki noktaların sayısı $\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k}$ olarak bulunur. Lemma 3.1'de belirtildiği gibi j -uzunluğundaki noktaların derecesi i_j ile ve k -uzunluğundaki noktaların derecesi ise i_k ile gösterilmektedir. Eğer $n - j < k$ ise j -uzunluğundaki noktalar ile arasında kenar bulunan k -uzunluğundaki noktaların sayısı $\binom{n}{k}$ olur. Dolayısıyla $j < k$ durumunda

$$(M_1(G))_1 = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} \right) (i_j + i_k),$$

ve eğer $n - j < k$ ise

$$(M_1(G))_1 = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \binom{n}{k} (i_j + i_k)$$

olarak bulunur.

Şimdi $j = k$ olduğunu kabul edelim. u olarak isimlendireceğimiz j -uzunluğunda bir nokta seçelim ve u ile arasında kenar bulunan j -uzunluğundaki tüm noktaların sayısını belirleyelim. Bu sayı

$\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} - 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla $j = k$ olduğunda

$$(M_1(G))_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} - 1 \right) (i_j + i_k) \right)$$

olur.

$j = k$ eşitliği $i_j = i_k$ eşitliğini de getireceğinden bulmuş olduğumuz formül aşağıdaki gibi basitleştirilebilir:

$$(M_1(G))_2 = \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1 \right) (i_j).$$

Eğer $n - j < j$ ise elde edilen formül aşağıdaki gibi olur:

$$(M_1(G))_2 = \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - 1 \right) (i_j).$$

Sonuç olarak, G 'nin birinci Zagreb indeksi, $j < k$ ve $j = k$ durumlarına karşılık gelen iki formülün toplamı olacaktır.

G 'nin ikinci Zagreb indeksi için ispat fikri de benzerdir.

$j < k$ olduğunda

$$(M_2(G))_1 = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} \right) (i_j i_k),$$

ve eğer $n - j < k$ ise j -uzunluğundaki bir noktaya bir kenar ile bağlı olan k -uzunluğundaki noktaların sayısı $\binom{n}{k}$ olduğundan

$$(M_2(G))_1 = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \binom{n}{k} (i_j i_k)$$

elde edilir.

$j = k$ olduğunda elde edilen formül aşağıdaki gibidir:

$$(M_2(G))_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-j}{k} - 1 \right) (i_j i_k) \right).$$

Bu formül basitleştirilerek aşağıda belirtilen hâle gelir.

$$(M_2(G))_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - \binom{n-j}{j} - 1 \right) (i_j)^2 \right),$$

ve eğer $n - j < k$ ise

$$(M_2(G))_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{k} - 1 \right) (i_j i_k) \right),$$

$j = k$ ise $i_j = i_k$ olacağından,

$$(M_2(G))_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} \left(\binom{n}{j} - 1 \right) (i_j)^2$$

elde edilir.

Örnek 3.3. G , $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde ayrık topolojik bir graf olsun (Şekil 2). Teorem 3.3'ün uygulanması aşağıdaki sonuçları verir:

$M_1(G) = 1320$ ve $M_2(G) = 6528$.

Ayrıca buradaki G grafının $M_1(G)$ ve $M_2(G)$ değerleri, [8] numaralı referansta Gutman ve Trinajstić'in verdiği formülle de hesaplanmış olup sonuçların aynı çıktığı görülmüştür.

4. TARTIŞMA

Bu çalışmada, n elemanlı bir X kümesi üzerindeki ayrık topolojik bir grafın M-polinomunu hesaplamak için genel bir formül verilmektedir ve M-polinomunu kullanarak grafın derece tabanlı topolojik indeksleri, özellikle de Zagreb indekslerinin hesabı için bir formül sunulmaktadır. Ayrıca, derece tabanlı topolojik indekslerin değerleri, ilk olarak M-polinomu ve ikinci olarak Gutman ve Trinajstić tarafından tanıtılan yöntem [8] kullanılarak hesaplanmıştır. İki yöntemin de aynı sonuçları verdiği görülmüştür.

TEŞEKKÜR

Prof. Dr. Şerife Büyükköse ve Dr. Öğr. Üyesi Şule Yüksel Güngör'e çalışmaya olan katkıları ve yorumları için teşekkür ederiz.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

YAZAR KATKI ORANI

Hatice Çoban Eroğlu: Kavramlaştırma, Metodoloji, Yazılım, Araştırma, İçerik analizi, Makalenin yazımı- Orijinal taslak, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme.

KAYNAKLAR

- [1] Wilson, R. J. (1979). Introduction to Graph Theory, *Pearson Education India*.
- [2] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). Graph Theory with Applications. (Vol. 290). *London: Macmillan*.
- [3] Diestel, R. (2024). Graph Theory, *Springer-Verlag, Heidelberg Graduate Texts in Mathematics*, Volume 173 ISBN 978-3-662-53621-6 eISBN 978-3-96134-005-7.
- [4] Gross, J. L. and Tucker, W. T. (2001). Topological Graph Theory. *Courier Corporation*.

- [5] Grami, A. (2022). Discrete Mathematics: Essentials and Applications. *Academic Press*.
- [6] Deutsch, E., Klavžar, S. and Romih, G. D. (2023). How to compute the M-polynomial of (chemical) graphs. *Match: Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 89.2: 275-285.
- [7] Raza, Z., Sukaiti and M. E. K. (2020). M-Polynomial and Degree Based Topological Indices, *Symmetry*, 12, 831.
- [8] Gutman, I. and Trinajstić, N. (1972). Graph theory and molecular orbitals, Total π -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17 (1972) 535–538.
- [9] Idan, M. K. and Abdhusein, M. A. (2022). Some properties of discrete topological graph, *Journal of Physics: Conference Series*.
- [10] Jänich, K. (1984). Topology. *Springer*.
- [11] Munkres, J. R. (1974). Topology. *Pearson*.
- [12] Jabor, A. A. and Omran, A. A. (2019). Domination in Discrete Topology Graph, Third International Conference of Mathematical Sciences (ICMS). *AIP Conference Proceedings*, 2183, 030006-1–030006-3.
- [13] Klavzar, S. and Deutsch, E. (2015). M-polynomial and degree-based topological indices. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*. 6, 93–102.