

Tam Graflardan Türetilen Bazı Özel Grafların Wiener Tipinde Topolojik İndeksleri

Hatice Topcu*,¹ Eda Güner,²

*¹Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, NEVŞEHİR

²Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, NEVŞEHİR

(Alınış / Received: 14.01.2025, Kabul / Accepted: 10.02.2025, Online Yayınlanma / Published Online: 30.04.2025)

Anahtar Kelimeler

Ananas graf,
Deniz kestanesi graf,
Kırık deniz kestanesi graf,
Tam tırtıl,
Uçurtma graf,
Çift uçurtma graf,
Wiener tipinde topolojik
indeksler

Öz: Topolojik indeksler başta kimyasal graflar olmak üzere birçok uygulamaya sahip olan sabit sayılardır. Uygulaması yalnızca kimya alanında değil, bilgisayar bilimi, ağ oluşturma vb. alanlarda da yapılabilir. Dolayısıyla, graf teoride birçok topolojik indeks mevcuttur. Bu çalışmada özel olarak seçilen Wiener tipinde mesafe bazlı topolojik indeksler olan Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary, Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener ve Terminal Wiener indeksleri ele alınmıştır. İyi bilinen n noktalı yol graf P_n ve tam graf K_n için burada belirtilen Wiener tipindeki topolojik indeks değerleri literatürde yer almakta olup bu çalışmada kullanılmak üzere mertebelerine bağlı olacak biçimde tekrar hesaplanmıştır. Daha sonra bu hesaplardan yararlanarak tam graf bazlı özel graf türleri olan ananas graf, deniz kestanesi graf, kırık deniz kestanesi graf, uçurtma graf ve çift uçurtma grafların burada belirtilen Wiener tipinde topolojik indeksleri graf parametrelerine dayalı biçimde hesaplanarak sunulmuştur. Ayrıca ananas, deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi grafların tam tırtıl grafların özel durumları olduğu belirtilerek, tam tırtıl graflar için de Wiener tipinde topolojik indeksler graf parametrelerine dayalı biçimde elde edilmiştir.

Wiener Type Topological Indices of Some Graphs Derived From Complete Graphs

Keywords

Pineapple graph,
Urchin graph,
Broken urchin graph,
Complete caterpillar,
Kite graph,
Double kite graph,
Wiener type topological
indices

Abstract: Topological indices are constant numbers that have many application, especially in chemical graphs. Its applications are not only in the field of chemistry, but also in computer science, networking, etc. Therefore, there are many topological indices in graph theory. In this work, specially selected Wiener type distance-based topological indices, Wiener, Wiener polarity, Hyper Wiener, Harary, reciprocal complementary Wiener and terminal Wiener indices, are discussed. The Wiener type topological indices mentioned here for the well-known n vertices path graph P_n and the complete graph K_n are available in the literature and have been recalculated depending on their orders to be used in this work. Then, by using this calculation, the wiener type topological indices of the complete graph based special graph types, namely, pineapple graph, urchin graph, broken urchin graph, kite graph and double kite graphs, are calculated and presented based on graph parameters. In addition, it was stated that pineapple, urchin and broken urchin graphs are special cases of complete caterpillar graph, and Wiener type topological indices were obtained for complete caterpillar graph based on graph parameters.

*İlgili Yazar, email: haticekamittopcu@gmail.com

1. Giriş

Boştan farklı noktalar kümesi $V(G)$ ve $V(G)$ nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan $E(G)$ kenarlar kümesinin birlikte oluşturduğu $G = (V(G), E(G))$ yapısına bir graf (graph) denir. Katlı kenar (bir nokta çifti arasında birden fazla kenar bulunması, multiple edge) ve ilmek (bir noktayı kendisine bağlayan kenar, loop) içermeyen bir grafa ise basit graf (simple graph) denir. Bütün kenarlarına yön tayin edilmiş bir grafa yönlü graf (directed graph), hiçbir kenarına yön tayin edilmemiş bir grafa ise yönsüz graf (undirected graph) denir. Bu çalışmada yer alan tüm graflar basit ve yönsüzdür. $V' \subseteq V(G)$ ve $E' \subseteq E(G)$ olmak üzere $G' = (V', E')$ grafına, G nin bir alt grafı

(subgraph) denir. G de bazı noktaların seçilip, bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle oluşan alt grafa ise G nin bir indirgenmiş alt grafi (induced subgraph) denir. G de keyfi bir u noktasının derecesi, o noktaya değen tüm kenarların sayısıdır ve $\deg_G(u)$ ya da kısaca $\deg(u)$ biçiminde gösterilir. Derecesi sıfır olan bir noktaya izole nokta (isolated vertex) denir. Derecesi 1 olan bir noktaya ise sarkıt nokta (pendant vertex) ve bu noktaya değen kenara sarkıt kenar (pendant edge) denir. G de keyfi iki u, v noktaları arasında nokta tekrar etmeyen bir yürüyüşe bir $u - v$ yolu ($u - v$ path) denir. Bir $u - v$ yolunda kullanılan kenar sayısına ise bu yolun uzunluğu (length) denir. u dan v ye en kısa yollardan her birine bir $u - v$ jeodeziği ($u - v$ geodesic) denir ve bu jeodeziğin uzunluğuna u ile v arasındaki mesafe (distance) denir, $d_G(u, v)$ ile gösterilir. Bir G grafinde noktalar arası uzaklıkların en büyüğüne ise G nin çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ ile gösterilir. Yani $diam(G) = \max_{u,v \in V(G)} \{d_G(u, v)\}$ biçimindedir. n adet nokta içeren bir G çizgesinde bütün nokta çiftleri arasında bir kenar bulunuyorsa bu grafa özel olarak tam graf (complete graph) denir ve K_n ile gösterilir. n noktalı, $n - 1$ kenarlı ve sarkıt iki noktası arasında bir yol oluşturan grafa ise yol graf (path graph) denir ve P_n ile gösterilir. Bu çalışmada yer alan kavramları da içeren daha genel temel graf teori bilgisi için [1] nolu kaynak önerilmektedir.

Topolojik indeksler, graf teorisinde bir grafin yapısal özelliklerini ve karakteristiklerini belirlemek için kullanılan nümerik değerlerdir. Kimya, biyoloji, bilgisayar bilimi gibi çeşitli alanlarda yaygın ve etkin kullanım alanına sahiptirler. Derece ve mesafe gibi graf parametrelerine dayalı olarak hesaplanırlar. Literatürde en iyi bilinen mesafe bazlı topolojik indeks, 1947de Harold Wiener tarafından tanıtılan Wiener indeksidir[2]. Bir G moleküler grafinin Wiener indeksi, G deki sıralı olmayan nokta çiftleri arasındaki uzaklıkların toplamıdır ve $W(G)$ ile gösterilir. Literatürde iyi bilinen Wiener tipinde diğer topolojik indeksler; Wiener polarite indeksi $W_p(G)$, Hiper Wiener indeksi $WW(G)$, Harary indeksi $H(G)$, Karşılıklı tamamlayıcı Wiener indeksi $RCW(G)$ ve Terminal Wiener indeksi $TW(G)$ dir[3-4].

Bu çalışmada literatürde iyi bilinen [5-8] ve çeşitli spektral özelliklerinden dolayı üzerinde yaygın biçimde çalışılan tam graf bazlı özel graf türleri olan ananas graf (pineapple graph), deniz keşanesi graf (urchin graph), kırık deniz keşanesi graf (broken urchin graph), uçurtma graf (kite graph) ve çift uçurtma grafların (double kite graph) Wiener tipinde topolojik indeksleri graf parametrelerine dayalı biçimde hesaplanarak sunulmuştur. Ananas, deniz keşanesi ve kırık deniz keşanesi graflar ayrıca tam tırtıl (complete caterpillar) grafların özel durumları olduğundan, tam tırtıl graflar için de Wiener tipinde topolojik indeksler graf parametrelerine dayalı biçimde elde edilmiştir.

2. Önbilgiler

Bu çalışmada özel olarak seçilen iyi bilinen Wiener tipinde topolojik indekslere ait tanımlar sırasıyla aşağıda sunulmuştur.

Tanım 2.1: (Wiener İndeks)

$G = (V(G), E(G))$ moleküler grafi verilsin. G de keyfi u, v noktaları arasındaki mesafe $d_G(u, v)$ olmak üzere,

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_G(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$$

biçiminde tanımlıdır[2].

Tanım 2.2: (Wiener Polarite İndeks)

$G = (V(G), E(G))$ moleküler grafi verilsin. G de aralarındaki mesafe 3'e eşit olan nokta çiftlerinin sayısıdır. Yani,

$$W_p(G) = |\{\{u, v\} \subseteq V(G): d_G(u, v) = 3\}|$$

biçiminde olur[3].

Tanım 2.3: (Hiper Wiener İndeks)

1993 te Milan Randić tarafından tanıtılmıştır[9]. 1995 te Klein, Lukovits ve diğerleri tarafından revize edilerek aşağıdaki gibi formülize edilmiştir[10]. $G = (V(G), E(G))$ moleküler grafi verilsin.

$$WW(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in V(G)} [d_G(u, v) + d_G(u, v)^2]$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.4: (Harary İndeks)

1993 te Plavšić[11] ve Ivanciuc[12] de birbirinden bağımsız olarak tanıtılmıştır. $G = (V(G), E(G))$ moleküler grafi verilsin.

$$H(G) = \sum_{\{u,v\} \in V(G)} \frac{1}{d_G(u,v)}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.5: (Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener İndeks)

2000 de Ivanciuc tarafından tanıtılmıştır[13-14]. $G = (V(G), E(G))$ moleküler grafi verilsin. G nin çapı $diam(G) = d$ olmak üzere,

$$RCW(G) = \sum_{\{u,v\} \in V(G)} \frac{1}{d + 1 - d_G(u,v)}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.6: (Terminal Wiener İndeks)

Petrović ve diğerleri tarafından 2009 da tanıtılmıştır[15]. $G = (V(G), E(G))$ moleküler grafi verilsin. G deki sarkıt noktaların kümesi $V_1(G)$ olmak üzere,

$$TW(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V_1(G)} d_G(u,v)$$

biçiminde tanımlıdır.

Bu çalışmada özel olarak seçilip incelenen tam graf bazlı yapıya sahip graflara dair tanımlar aşağıda sırasıyla sunulmuştur.

Tanım 2.7: (Ananas Graf)

$p \geq 3$ ve $q \geq 1$ olmak üzere, p noktalı K_p tam grafinin belirli bir noktasına q adet sarkıt kenar eklenmesiyle oluşan grafa ananas (pineapple) graf denir[5-6].

Tanım 2.8: (Deniz Kestanesi Graf)

$p \geq 3$ olmak üzere, p noktalı K_p tam grafinin her bir noktasına bir adet sarkıt kenar eklenmesiyle oluşan grafa deniz kestanesi (urchin) graf denir[7].

Tanım 2.9: (Kırık Deniz Kestanesi Graf)

$p \geq 3$, $q \geq 1$ ve $q < p$ olmak üzere, p noktalı K_p tam grafinin q adet noktasına birer adet sarkıt kenar eklenmesiyle oluşan grafa kırık deniz kestanesi (broken urchin) graf denir[7].

Tanım 2.10: (Tam Tırtıl Graf)

$p \geq 3$ ve $q \geq 1$ olmak üzere, q adet sarkıt nokta içeren ve içerdiği bütün sarkıt noktalar silindiğinde oluşan indirgenmiş alt grafin K_p tam grafına izomorf olduğu grafa tam tırtıl (complete caterpillar) graf denir. Tanım 2.7, Tanım 2.8. ve Tanım 2.9 da verilen ananas, deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi graflar tam tırtıl grafların özel halleridir.

Tanım 2.11: (Uçurtma Graf)

$p \geq 3$ ve $q \geq 1$ olmak üzere, p noktalı K_p tam grafinin belirli bir noktasına q adet nokta içeren P_q yol grafin eklenmesiyle oluşan grafa uçurtma (kite) graf denir[8].

Tanım 2.12: (Çift Uçurtma Graf)

$p, q \geq 3$ ve $r \geq 1$ olmak üzere, r adet nokta içeren P_r yol grafinin sarkıt noktalarına sırasıyla p noktalı K_p tam grafinin ve q noktalı K_q tam grafinin eklenmesiyle oluşan grafa çift uçurtma (double kite) graf denir[8].

3. Bulgular

n noktalı yol graf P_n ve tam graf K_n iyi bilinen graflardır ve Wiener tipindeki topolojik indeksleri literatürde yer almakta ve kolaylıkla elde edilebilmektedir. Bu çalışmada yine de Önerme 3.1 ve Önerme 3.2 de bu grafların Wiener tipindeki topolojik indeksleri mertebelerine bağlı olacak biçimde hesaplanmıştır.

Önerme 3.1: n noktalı yol graf P_n için Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary, Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener ve Terminal Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir. n . harmonik sayı $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere,

$$(i) W(P_n) = \frac{n(n^2 - 1)}{6} \quad (1)$$

$$(ii) n \geq 4 \text{ için } W_p(P_n) = n - 3 \quad (2)$$

$$(iii) W_H(P_n) = \frac{n(n+2)(n^2 - 1)}{24} \quad (3)$$

$$(iv) H(P_n) = n(H_n - 1) \quad (4)$$

$$(v) RCW(P_n) = n - 1 \quad (5)$$

$$(vi) TW(P_n) = n - 1 \quad (6)$$

İspat:

(i) $n \geq 2$ olmak üzere P_n grafi için,

$W(P_n) = [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] + [1 + 2 + \dots + (n-2)] + \dots + (1 + 2) + 1$ yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} W(P_n) &= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \dots + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} \\ &= \frac{1}{2} [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) + (n-1) \cdot n] = \frac{1}{2} \left[\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \right] = \frac{n(n^2 - 1)}{6} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(ii) $n \geq 4$ için P_n yol grafinin noktaları $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olmak üzere;

$n = 4$ için mesafesi 3 birim olan nokta çiftleri (v_1, v_4) olup $W_p(P_4) = 1$ olur.

$n = 5$ için mesafesi 3 birim olan nokta çiftleri $\{(v_1, v_4), (v_2, v_5)\}$ olup $W_p(P_5) = 2$ olur.

$n = 6$ için mesafesi 3 birim olan nokta çiftleri $\{(v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_6)\}$ olup $W_p(P_6) = 3$ olur.

Bu şekilde devam edildiğinde,

n için mesafesi 3 birim olan nokta çiftleri $\{(v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_6), \dots, (v_{n-3}, v_n)\}$ olup, $W_p(P_n) = n - 3$ olduğu görülür.

(iii) $n \geq 2$ olmak üzere, $W(P_n) = \frac{n(n^2-1)}{6}$ olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} \sum_{u,v \in V(P_n)} d^2(u, v) &= [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + [1^2 + 2^2 + \dots + (n-2)^2] + \dots + (1^2 + 2^2) + 1^2 \\ &= 1^2(n-1) + 2^2(n-2) + \dots + (n-2)^2[n - (n-2)] + (n-1)^2[n - (n-1)] \\ &= n[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] - [1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3] \\ &= n \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{n^2(n-1)}{2} \left(\frac{2n-1}{3} - \frac{n-1}{2} \right) = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \end{aligned}$$

olup bu eşitliklerden

$$W_H(P_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n^2-1)}{6} + \frac{n^2(n^2-1)}{12} \right] = \frac{n(n+2)(n^2-1)}{24}$$

elde edilir.

(iv) $n \geq 2$ olmak üzere,

$$n = 2 \text{ için } H(P_2) = 1$$

$$n = 3 \text{ için } H(P_3) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + (1)$$

$$n = 4 \text{ için } H(P_4) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + (1)$$

Bu şekilde devam edildiğinde n için

$$H(P_n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + (1)$$

$$= 1 \cdot (n-1) + \frac{1}{2}(n-2) + \frac{1}{3}(n-3) + \dots + \frac{1}{n-1}[n - (n-1)]$$

$$= \frac{n}{1} - 1 + \frac{n}{2} - 1 + \dots + \frac{n}{n-1} - 1$$

$$= n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - 1 \cdot (n-1)$$

$$\left(H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ eşitliğinden}\right)$$

$$= n \cdot H_n - n \frac{1}{n} - (n-1)$$

Yani $H(P_n) = n(H_n - 1)$ elde edilir.

(v) $n \geq 2$ için $\text{diam}(P_n) = n-1$ olduğundan $RCW(P_n) = \sum_{u,v \in V(P_n)} \frac{1}{n - d_{P_n}(u,v)}$ olacaktır.

P_n grafinin $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta çiftleri arası uzaklıkları sırasıyla,

$$v_1 \text{ için } \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-(n-2)} + \frac{1}{n-(n-1)}\right)$$

$$v_2 \text{ için } \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-(n-2)}\right)$$

$\vdots$

$$v_{n-1} \text{ için } \left(\frac{1}{n-1}\right)$$

olup

$$RCW(P_n) = (n-1) \frac{1}{n-1} + (n-2) \frac{1}{n-2} + \dots + 2 \frac{1}{n-(n-2)} + 1 \frac{1}{n-(n-1)} = 1 + 1 + \dots + 1 = n-1$$

bulunur.

(vi) $n \geq 2$ olmak üzere, P_n 'de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalarından v_1 ve v_n noktaları uç noktalar olup P_n graf tanımından yararlanarak bu iki nokta arası uzaklık " $n-1$ " dir. O zaman terminal Wiener indeksinin tanımından $TW(P_n) = n-1$ elde edilir.

Önerme 3.2: n noktalı tam graf K_n için Wiener, Hiper Wiener, Harary ve Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener indeksleri aşağıdaki gibidir.

$$W(K_n) = W_H(K_n) = H(K_n) = RCW(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} \quad (7)$$

İspat:

(i) K_n 'de tüm noktalar arası 1 birim olduğundan, $W(K_n) = 1 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-2) + \dots + 1 \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ olur.

(ii) $W(K_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda K_n 'de tüm noktalar arası 1 birim olduğundan

$$\sum_{u,v \in V(K_n)} d^2(u,v) = \binom{n}{2} 1^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

olup bu eşitliklerden

$$W_H(K_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \right] = \frac{n(n-1)}{2}$$

elde edilir.

(iii) K'_n de tüm nokta çiftleri arası 1 birim olduğundan, $H(K_n) = \binom{n}{2} \cdot 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ eşitliği kolayca görülür.

(iv) K_n tam graf için $diam(K_n) = 1$ olup $RCW(K_n) = \sum_{u,v \in V(K_n)} \frac{1}{2-d_{K_n}(u,v)}$ biçimindedir. K_n grafında tüm nokta çiftleri arası uzaklık 1 birim olduğundan,

$$RCW(K_n) = \binom{n}{2} \frac{1}{2-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1: $p \geq 3$ ve $q \geq 1$ olmak üzere, ananas graf K_p^q için Wiener, Hiper Wiener, Harary, Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener ve Terminal Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir. n . harmonik sayı $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere,

$$(i) W(K_p^q) = \frac{(p-1)(p+4q)}{2} + q^2$$

$$(ii) W_H(K_p^q) = \frac{1}{2}[(p-1)(p+6q) + q(3q-1)]$$

$$(iii) H(K_p^q) = \frac{1}{4}[2p(p-1) + 2q(p+1) + q(q-1)]$$

$$(iv) RCW(K_p^q) = \frac{(p-1)(p+4q) + 2q^2}{4}$$

$$(v) TW(K_p^q) = q(q-1)$$

İspat:

(i) K_p deki p tane nokta için Wiener indeks değeri (7)'den; $W(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olur. q tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer $(p-1)$ tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$q \cdot [1 + (p-1) \cdot 2] = q(2p-1) \quad (8)$$

eşitliği elde edilir.

q tane sarkıt noktanın birbirine uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$2 \cdot \binom{q}{2} = q(q-1) \quad (9)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (7), (8) ve (9) dan

$$W(K_p^q) = \frac{(p-1)(p+4q)}{2} + q^2$$

olarak bulunur.

(ii) K_p 'deki p tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (7)'den; $W_H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olur. q tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer $(p-1)$ tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan,

$$q \frac{1}{2} [1 + 1^2 + (p-1)(2 + 2^2)] = q(3p-2) \quad (10)$$

eşitliği elde edilir. q tane sarkıt noktanın birbirine uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$\binom{q}{2} \frac{1}{2} [2 + 2^2] = \frac{3q(q-1)}{2} \quad (11)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (7), (10) ve (11)'den

$$W_H(K_p^q) = \frac{1}{2}[(p-1)(p+6q) + q(3q-1)]$$

olarak bulunur.

(iii) K_p deki p tane nokta için Harary indeks değeri (7)'den, $H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olur. q tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer $(p-1)$ tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$q \cdot \left[1 + (p-1) \cdot \frac{1}{2}\right] = \frac{q(p+1)}{2} \quad (12)$$

eşitliği elde edilir. q tane sarkıt noktanın birbirine uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$\binom{q}{2} \frac{1}{2} = \frac{q(q-1)}{4} \quad (13)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (7), (12) ve (13) eşitliklerinden

$$H(K_p^q) = \frac{1}{4}[2p(p-1) + 2q(p+1) + q(q-1)]$$

olarak bulunur.

(iv) K_p^q ananas graf için $diam(K_p^q) = 2$ olup $RCW(K_p^q) = \sum_{u,v \in V(K_p^q)} \frac{1}{3-d_{K_p^q}(u,v)}$ biçimindedir. K_p 'de tüm nokta çiftleri arası uzaklık 1 birim olduğundan

$$\binom{p}{2} \frac{1}{3-1} = \frac{p(p-1)}{4} \quad (14)$$

elde edilir. q tane sarkıt noktanın K_p deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer $(p-1)$ tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$q \left[\left(\frac{1}{3-1} \right) + \left((p-1) \frac{1}{3-2} \right) \right] = \frac{q(2p-1)}{2} \quad (15)$$

bulunur. q tane sarkıt noktanın birbirine uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$\binom{q}{2} \frac{1}{3-2} = \frac{q(q-1)}{2} \quad (16)$$

olup (14), (15) ve (16)'dan

$$RCW(K_p^q) = \frac{(p-1)(p+4q) + 2q^2}{4}$$

olarak bulunur.

(v) K_p^q ananas grafinin, K_p tam grafi ve $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ uç noktalarından oluştuğunu biliyoruz. Uç noktalar arası uzaklık 2 birim olduğundan ve terminal Wiener indeksinin tanımından yararlanarak $TW(K_p^q) = q(q-1)$ eşitliği kolayca görülür.

Teorem 3.2 $p \geq 3$ olmak üzere deniz kestanesi graf $Urchin_p^p$ için Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary, Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener ve Terminal Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$(i) W(Urchin_p^p) = p(4p-3)$$

$$(ii) W_p(Urchin_p^p) = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$(iii) W_H(Urchin_p^p) = \frac{p(13p - 11)}{2}$$

$$(iv) H(Urchin_p^p) = \frac{p(7p - 1)}{6}$$

$$(v) RCW(Urchin_p^p) = \frac{p(7p - 5)}{6}$$

$$(vi) TW(Urchin_p^p) = \frac{3p(p - 1)}{2}$$

İspat:

(i) K_p deki p tane nokta için Wiener indeks değeri (7)'den $W(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olur. p tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan,

$$3 \binom{p}{2} = \frac{3}{2} p(p - 1) \quad (17)$$

olur. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup p tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları

$$p[1 + (p - 1)2] = p(2p - 1) \quad (18)$$

bulunur. Böylece (7), (17) ve (18)'den

$$W(Urchin_p^p) = p(4p - 3)$$

elde edilir.

(ii) p tane sarkıt noktanın birbirine uzaklığı 3 birim olduğundan

$$W_p(Urchin_p^p) = \frac{p(p - 1)}{2}$$

olur.

(iii) K_p 'deki p tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (7)'den $W_H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. p tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan

$$\frac{1}{2} \binom{p}{2} (3 + 3^2) = 3p(p - 1) \quad (19)$$

olur. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, p tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları

$$\frac{1}{2} p[1 + 1^2 + (p - 1)(2 + 2^2)] = p[1 + 3(p - 1)] \quad (20)$$

bulunur. Böylece (7), (19) ve (20)'den

$$W_H(Urchin_p^p) = \frac{p(13p - 11)}{2}$$

elde edilir.

(iv) K_p deki p tane nokta için Harary indeks değeri (7)'den $H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. p tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan

$$\binom{p}{2} \frac{1}{3} = \frac{p(p-1)}{6} \quad (21)$$

elde edilir. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, p tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları

$$p \cdot \left[1 + (p-1) \frac{1}{2} \right] = p + \frac{p(p-1)}{2} \quad (22)$$

bulunur. Böylece (7), (21) ve (22)'den

$$H(Urchin_p^p) = \frac{p(7p-1)}{6}$$

olur.

(v) $Urchin_p^p$ deniz kestanesi graf için $diam(Urchin_p^p) = 3$ olup

$$RCW(Urchin_p^p) = \sum_{u,v \in V(Urchin_p^p)} \frac{1}{4 - d_{Urchin_p^p}(u,v)}$$

biçimindedir.

K_p 'de tüm nokta çiftleri arası 1 birim olduğundan,

$$\binom{p}{2} \frac{1}{4-1} = \frac{p(p-1)}{6} \quad (23)$$

elde edilir. p tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan

$$\binom{p}{2} \frac{1}{4-3} = \frac{p(p-1)}{2} \quad (24)$$

olur. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, p tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları,

$$p \left(\frac{1}{4-1} + \frac{p-1}{4-2} \right) = \frac{p}{3} + \frac{p(p-1)}{2} \quad (25)$$

olur. (23), (24) ve (25)'den

$$RCW(Urchin_p^p) = \frac{p(7p-5)}{6}$$

olarak bulunur.

(vi) $Urchin_p^p$ deniz kestanesi graf; K_p grafinin her bir noktasına birer adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen graf olduğundan p tane uç noktası vardır ve uç noktalar arası uzaklık 3 birimdir. Böylece terminal Wiener indeksinin tanımından yararlanarak

$$TW(Urchin_p^p) = \frac{3p(p-1)}{2}$$

eşitliği kolayca bulunur.

Teorem 3.3 : $p \geq 3$, $q \geq 1$ ve $q < p$ olmak üzere, kırık deniz kestanesi graf $Urchin_p^q$ için Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary, Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener ve Terminal Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$(i) W(Urchin_p^q) = \frac{1}{2} [(p-1)(p+4q) + q(3q-1)]$$

$$(ii) W_p(Urchin_p^q) = \frac{q(q-1)}{2}$$

$$(iii) W_H(Urchin_p^q) = \frac{p(p-1)}{2} + q(3p + 3q - 5)$$

$$(iv) H(Urchin_p^q) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(3p+q+2)}{6}$$

$$(v) RCW(Urchin_p^q) = \frac{p(p-1)}{6} + \frac{(p+q-2)q}{2} + \frac{q}{3}$$

$$(vi) TW(Urchin_p^q) = \frac{3q(q-1)}{2}$$

İspat:

(i) K_p deki p tane nokta için Wiener indeks değeri (7)'den; $W(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. q tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan,

$$3 \binom{q}{2} = \frac{3}{2} q(q-1) \quad (26)$$

eşitliği bulunur. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, q tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları

$$q[1 + (p-1)2] = q(2p-1) \quad (27)$$

bulunur. Böylece (7), (26) ve (27)'den

$$W(Urchin_p^q) = \frac{1}{2} [(p-1)(p+4q) + q(3q-1)]$$

eşitliği bulunur.

(ii) q tane sarkıt noktaların birbirine uzaklığı 3 birim olduğundan

$$W_p(Urchin_p^q) = \frac{q(q-1)}{2}$$

olduğu kolayca görülür.

(iii) K_p 'deki p tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (7)'den; $W_H(K_n) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. q tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan

$$\frac{1}{2} \binom{q}{2} (3 + 3^2) = 3q(q-1) \quad (28)$$

olur. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, q tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları

$$\frac{1}{2} \cdot q[1 + 1^2 + (p-1)(2 + 2^2)] = q(3p-2) \quad (29)$$

bulunur. Böylece (7), (28) ve (29) eşitliklerinden

$$W_H(Urchin_p^q) = \frac{p(p-1)}{2} + q(3p + 3q - 5)$$

olarak bulunur.

(iv) K_p deki p tane nokta için Harary indeks değeri (7)'den $H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. q tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan

$$\binom{q}{2} \frac{1}{3} = \frac{q(q-1)}{6} \quad (30)$$

eşitliği elde edilir. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, q tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları

$$q \cdot \left[1 + (p-1) \frac{1}{2} \right] = \frac{q(p+1)}{2} \quad (31)$$

bulunur. Böylece (7), (30) ve (31)'den

$$H(Urchin_p^q) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(3p+q+2)}{6}$$

olarak bulunur.

(v) $Urchin_p^q$ kırık deniz keşanesi graf için $diam(Urchin_p^q) = 3$ olduğundan,

$$RCW(Urchin_p^q) = \sum_{u,v \in V(Urchin_p^q)} \frac{1}{4 - d_{Urchin_p^q}(u,v)}$$

biçiminde olur. K_p 'de tüm nokta çiftleri arası 1 birim olduğundan

$$\binom{p}{2} \frac{1}{4-1} = \frac{p(p-1)}{6} \quad (32)$$

elde edilir. q tane sarkıt nokta çiftleri arası 3'er birim olduğundan

$$\binom{q}{2} \frac{1}{4-3} = \frac{q(q-1)}{2} \quad (33)$$

olur. 1 tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklığı "1,2,2,...,2" olup, q tane sarkıt noktanın K_p 'deki p tane noktaya uzaklıkları,

$$q \left(\frac{1}{4-1} + \frac{p-1}{4-2} \right) = \frac{q}{3} + \frac{q(p-1)}{2} \quad (34)$$

olur. (32), (33) ve (34)'den

$$RCW(Urchin_p^q) = \frac{p(p-1)}{6} + \frac{(p+q-2)q}{2} + \frac{q}{3}$$

olarak bulunur.

(vi) $Urchin_p^q$ kırık deniz keşanesi grafının q tane uç noktası vardır ve uç noktalar arası uzaklık 3 birimdir. Böylece terminal Wiener indeksinin tanımından yararlanarak

$$TW(Urchin_p^q) = \frac{3q(q-1)}{2}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 3.4: $p \geq 3, q \geq 1, q \leq p$ ve $n = k_1 + k_2 + \dots + k_q$ tane sarkıt nokta olmak üzere, tam tırtıl graf $K_p^{k_1, \dots, k_q}$ için Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary, Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener ve Terminal Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$(i) W(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{2} + n(2p-1) + k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1) + \frac{3}{2} [k_1(n-k_1) + k_2(n-k_2) + \dots + k_q(n-k_q)]$$

$$(ii) W_p(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{1}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

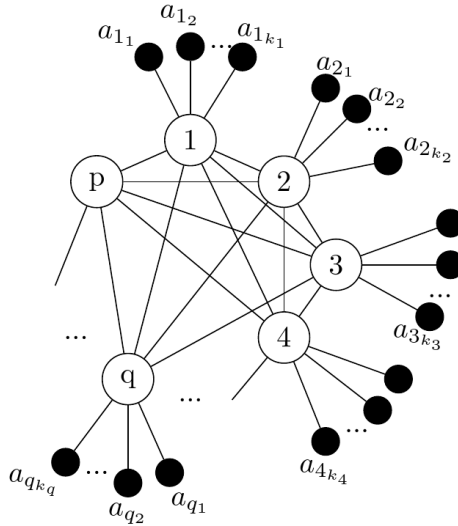
$$(iii) W_H(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{2} + n(3p-2) + \frac{3}{2} [k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)] + 3[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

$$(iv) H(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{n(p+1)}{2} + \frac{k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)}{4} + \frac{[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]}{6}$$

$$(v) RCW(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{6} + \frac{n(3p-1)}{6} + \frac{[k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)]}{4} + \frac{1}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

$$(vi) TW(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = [k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)] + \frac{3}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

İspat:



Şekil 1. Tam Tırtıl Graf

(i) K_p deki p tane nokta için wiener indeks değeri (7)'den; $W(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. n tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer $(p-1)$ tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_q)[1 + (p-1) \cdot 2] = (k_1 + k_2 + \dots + k_q)(2p-1) = n(2p-1) \quad (35)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k_1}\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k_2}\}, \dots, \{a_{q1}, a_{q2}, \dots, a_{qk_q}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan nokta çiftleri kendi grubu içinde birbirine uzaklığı 2'şer birim olduğundan

$$\left[\binom{k_1}{2} + \binom{k_2}{2} + \dots + \binom{k_q}{2} \right] \cdot 2 = k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1) \quad (36)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k_1}\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k_2}\}, \dots, \{a_{q1}, a_{q2}, \dots, a_{qk_q}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan noktaların diğer gruplardaki noktalara uzaklığı 3'er birim olduğundan

$$\frac{3}{2}[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \quad (37)$$

eşitliği elde edilir.

O halde (7), (35), (36) ve (37) eşitliklerinden

$$W(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{2} + n(2p-1) + k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1) + \frac{3}{2}[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

olur.

(ii) $\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan noktaların diğer gruplardaki noktalara uzaklığı 3'er birim olduğundan

$$W_p(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{1}{2}[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

bulunur.

(iii) K_p 'deki p tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (7)'den; $W_H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. n tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer (p-1) tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_q) \left[\frac{1}{2}[1 + 1^2 + (p-1)(2 + 2^2)] \right] = n(3p-2) \quad (38)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan nokta çiftleri kendi grubu içinde birbirine uzaklığı 2'şer birim olduğundan

$$\left[\binom{k_1}{2} + \binom{k_2}{2} + \dots + \binom{k_q}{2} \right] \left[\frac{1}{2}(2 + 2^2) \right] = \frac{3}{2}[k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)] \quad (39)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan noktaların, diğer gruplardaki noktalara uzaklığı 3'er birim olduğundan

$$\frac{1}{2}[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \cdot \left[\frac{1}{2}(3 + 3^2) \right] = 3[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \quad (40)$$

eşitliği elde edilir.

O halde (7), (38), (39) ve (40) eşitliklerinden

$$W_H(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{2} + n(3p-2) + \frac{3}{2}[k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)] + 3[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

bulunur.

(iv) K_p deki p tane nokta için Harary indeks değeri (7)'den $H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. n tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer (p-1) tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_q) \left[1 + (p-1) \frac{1}{2} \right] = (k_1 + k_2 + \dots + k_q) \frac{p+1}{2} = \frac{n(p+1)}{2} \quad (41)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan nokta çiftleri kendi grubu içinde birbirine uzaklığı 2'şer birim olduğundan

$$\left[\binom{k_1}{2} + \binom{k_2}{2} + \dots + \binom{k_q}{2} \right] \frac{1}{2} = \frac{k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1) + \dots + k_q(k_q - 1)}{4} \quad (42)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan noktaların, diğer gruplardaki noktalara uzaklığı 3'er birim olduğundan

$$\frac{1}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \frac{1}{3} = \frac{[k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]}{6} \quad (43)$$

eşitliği elde edilir.

O halde (7), (41), (42) ve (43) eşitliklerinden

$$H(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{n(p+1)}{2} + \frac{k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)}{4} + \frac{[k_1(n-k_1) + k_2(n-k_2) + \dots + k_q(n-k_q)]}{6}$$

bulunur.

(v) $K_p^{k_1, \dots, k_q}$ graf için $diam(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = 3$ olur. Böylece $RCW(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \sum_{u,v \in V(K_p^{k_1, \dots, k_q})} \frac{1}{4 - d_{K_p^{k_1, \dots, k_q}}(u,v)}$ olacaktır.

K_p grafında tüm nokta çiftleri arası 1 birim olduğundan

$$RCW(K_p) = \binom{p}{2} \frac{1}{4-1} = \frac{p(p-1)}{6} \quad (44)$$

eşitliği elde edilir. n tane sarkıt noktanın K_p 'deki noktalara uzaklığı; birleşim noktasına uzaklıkları 1 birim, diğer (p-1) tane noktaya uzaklıkları 2 birim olduğundan

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_q) \left[\frac{1}{4-1} + (p-1) \frac{1}{4-2} \right] = \frac{n(3p-1)}{6} \quad (45)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan nokta çiftleri kendi grubu içinde birbirine uzaklığı 2'şer birim olduğundan

$$\left[\binom{k_1}{2} + \binom{k_2}{2} + \dots + \binom{k_q}{2} \right] \frac{1}{4-2} = \frac{[k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)]}{4} \quad (46)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan noktaların diğer gruplardaki noktalara uzaklığı 3'er birim olduğundan

$$\frac{1}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \frac{1}{4-3} = \frac{1}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \quad (47)$$

eşitliği elde edilir. O halde (44), (45), (46) ve (47) eşitliklerinden

$$RCW(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = \frac{p(p-1)}{6} + \frac{n(3p-1)}{6} + \frac{[k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_q(k_q-1)]}{4} + \frac{1}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

bulunur.

(vi) $\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan nokta çiftleri kendi grubu içinde birbirine uzaklığı 2'şer birim olduğundan

$$\left[\binom{k_1}{2} + \binom{k_2}{2} + \dots + \binom{k_q}{2} \right] \cdot 2 = k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1) + \dots + k_q(k_q - 1) \quad (48)$$

eşitliği elde edilir.

$\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_{k_1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots, a_{2_{k_2}}\}, \dots, \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_{k_q}}\}$ sarkıt nokta gruplarında bulunan noktaların diğer gruplardaki noktalara uzaklığı 3'er birim olduğundan

$$\frac{3}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)] \quad (49)$$

eşitliği elde edilir.

O halde (48) ve (49) eşitliklerinden

$$TW(K_p^{k_1, \dots, k_q}) = [k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1) + \dots + k_q(k_q - 1)] + \frac{3}{2} [k_1(n - k_1) + k_2(n - k_2) + \dots + k_q(n - k_q)]$$

olur.

Teorem 3.5: $p \geq 3$ ve $q \geq 1$ olmak üzere, uçurtma graf $Kite_p^q$ için Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary ve Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir. n . Harmonik sayı $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere,

$$(i) W(Kite_p^q) = \frac{(p-1)[p+q(q+3)]}{2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}$$

$$(ii) W_p(Kite_p^q) = p + q - 3$$

$$(iii) W_H(Kite_p^q) = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(4p+q-4)(q+1)(q+2)(q+3)}{24}$$

$$(iv) H(Kite_p^q) = (p+q)(H_q - 1) + (p-1)\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{q+1}\right) + 1$$

$$(v) RCW(Kite_p^q) = (p-2)H_q + \frac{p(p-1)-2}{2(q+1)} + q + 1$$

İspat:

(i) K_p deki p tane nokta için Wiener indeks değeri (7)'den; $W(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. P_q 'daki q tane nokta için Wiener indeks değeri (1)'den $W(P_q) = \frac{q(q^2-1)}{6}$ biçimindedir. P_q 'daki q tane noktanın K_p 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazıldığında

$$[1 + (p-1) \cdot 2] + [2 + (p-1) \cdot 3] + \dots + [q + (p-1) \cdot (q+1)]$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + q) + (p-1)[2 + 3 + \dots + (q+1)]$$

$$= \frac{q(q+1)}{2} + (p-1) \left[\frac{(q+1)(q+2)}{2} - 1 \right] = \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q(p-1)(q+3)}{2} \quad (50)$$

bulunur. Böylece (1), (7) ve (50)'den

$$W(Kite_p^q) = \frac{(p-1)[p+q(q+3)]}{2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}$$

elde edilir.

(ii) $p \geq 3$ ve $q \geq 2$ olmak üzere $Kite_p^q$ uçurtma graf ve wiener polarite indeksinin tanımından yararlanarak P_q 'nin noktaları $\{V_{q_1}, V_{q_2}, \dots, V_{q_q}\}$, K_p 'nin noktaları $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_p}\}$ ve birleşim noktası V_{p_1} olmak üzere, K_p 'nin birleşim noktası hariç $\{V_{p_2}, V_{p_3}, \dots, V_{p_p}\}$ noktaları ile P_q 'nin V_{q_2} noktası arasındaki mesafe 3 birim olduğundan $\{(V_{q_2}, V_{p_2}), (V_{q_2}, V_{p_3}), \dots, (V_{q_2}, V_{p_p})\}$ nokta çiftleri arası mesafe 3'er birim olup $p - 1$ tane nokta çifti vardır. Birleşim noktası V_{p_1} dahil olacak şekilde P_{q+1} için $W_p(P_{q+1}) = q + 1 - 3 = q - 2$ olduğundan

$$W_p(Kite_p^q) = p + q - 3$$

elde edilir.

(iii) K_p 'deki p tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (7)'den; $W_H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. P_q 'daki q tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (3)'den $W_H(P_q) = \frac{q(q+2)(q^2-1)}{24}$ biçimindedir.

P_q 'daki q tane noktanın K_p 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazıldığında

$$\frac{1}{2} [1 + 1^2 + (p-1)2 + (p-1)2^2]$$

$$+ \frac{1}{2} [2 + 2^2 + (p-1)3 + (p-1)3^2]$$

+ ...

$$+ \frac{1}{2} [q + q^2 + (p-1)(q+1) + (p-1)(q+1)^2]$$

olup tüm bu değerler toplanıp düzenlendiğinde

$$= \frac{1}{2} [1 + (q+1)(p-1) + p(2+3+\dots+q)] + \frac{1}{2} [1^2 + (q+1)^2(p-1) + p(2^2+3^2+\dots+q^2)]$$

$$= 1 + \frac{(q+1)(p-1)}{2} (q+2) + \frac{p}{2} \left[\left(\frac{q(q+1)}{2} - 1 \right) + \left(\frac{q(q+1)(2q+1)}{6} - 1 \right) \right]$$

$$= 1 - p + \frac{(q+1)}{12} [6(p-1)(q+2) + 3pq + pq(2q+1)]$$

$$= 1 - p + \frac{(q+1)}{12} [6(p-1)(q+2) + 2pq(q+2)]$$

$$= \frac{(q+1)(q+2)(3p+pq-3)}{6} - (p-1) \quad (51)$$

eşitliği bulunur. Böylece (3), (7) ve (51)'den

$$W_H(Kite_p^q) = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(4p+q-4)(q+1)(q+2)(q+3)}{24}$$

olarak bulunur.

(iv) K_p deki p tane nokta için Harary indeks değeri (7)'den $H(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. P_q 'daki q tane nokta için Harary indeks değeri (4)'den $H(P_q) = q(H_q - 1)$ biçimindedir. P_q 'daki q tane noktanın K_p 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazıldığında

$$\left[\frac{1}{1} + (p-1) \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} + (p-1) \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{3} + (p-1) \frac{1}{4} \right] + \dots + \left[\frac{1}{q} + (p-1) \frac{1}{q+1} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q} \right) + (p-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q+1} \right)$$

$$= H_q + (p-1) \left(H_q - 1 + \frac{1}{q+1} \right)$$

$$= p.H_q - (p-1) + \frac{p-1}{q+1} \quad (52)$$

bulunur. Böylece (4), (7) ve (52) eşitliklerinden

$$H(Kite_p^q) = (p+q)(H_q - 1) + (p-1)\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{q+1}\right) + 1$$

elde edilir.

(v) $Kite_p^q$ uçurtma grafi için $diam(Kite_p^q) = (q+1)$ olduğundan $RCW(Kite_p^q) = \sum_{u,v \in V(Kite_p^q)} \frac{1}{q+2-d_{Kite_p^q}(u,v)}$ olur.

K_p' 'de tüm nokta çiftleri arası 1 birim olduğundan

$$\binom{p}{2} \frac{1}{q+2-1} = \frac{p(p-1)}{2(q+1)} \quad (53)$$

elde edilir. P_q' 'da $\{V_1, V_2, \dots, V_q\}$ nokta çiftleri arası uzaklıklar sırasıyla yazıldığında

$$\begin{aligned} V_1 \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-1} + \frac{1}{q+2-2} + \dots + \frac{1}{q+2-(q-2)} + \frac{1}{q+2-(q-1)} \right) \\ V_2 \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-1} + \frac{1}{q+2-2} + \dots + \frac{1}{q+2-(q-2)} \right) \\ & \vdots \\ V_{q-1} \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-1} \right) \end{aligned}$$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$\begin{aligned} & \frac{q-1}{q+1} + \frac{q-2}{q} + \frac{q-3}{q-1} + \dots + \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \left(1 - \frac{2}{q+1}\right) + \left(1 - \frac{2}{q}\right) + \left(1 - \frac{2}{q-1}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= 1 \cdot (q-1) - 2 \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \\ &= q-1 - 2 \left(H_q + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= q+2 - \frac{2}{q+1} - 2H_q \end{aligned} \quad (54)$$

olur. P_q' 'da $\{V_1, V_2, \dots, V_q\}$ noktalarının K_p' 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazıldığında

$$\begin{aligned} V_1 \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-1} + (p-1) \frac{1}{q+2-2} \right) = \frac{1}{q+1} + \frac{p-1}{q} \\ V_2 \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-2} + (p-1) \frac{1}{q+2-3} \right) = \frac{1}{q} + \frac{p-1}{q-1} \\ & \vdots \\ V_{q-1} \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-(q-1)} + (p-1) \frac{1}{q+2-q} \right) = \frac{1}{3} + \frac{p-1}{2} \\ V_q \text{ için } & \left(\frac{1}{q+2-q} + (p-1) \frac{1}{q+2-(q+1)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{p-1}{1} \end{aligned}$$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{q+1} + \frac{p-1}{q} \right) + \left(\frac{1}{q} + \frac{p-1}{q-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3} + \frac{p-1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{p-1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{q+1} + p \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-2} + \dots + \frac{1}{2} \right) + (p-1) \\ &= \frac{1}{q+1} + p-1 + p(H_q - 1) \\ &= pH_q + \frac{1}{q+1} - 1 \end{aligned} \quad (55)$$

olur. (53), (54) ve (55)'den

$$RCW(Kite_p^q) = (p-2)H_q + \frac{p(p-1)-2}{2(q+1)} + q+1$$

olarak bulunur.

Teorem 3.6 : $p, q \geq 3$ ve $r \geq 1$ olmak üzere çift uçurtma graf $DK_{p,q,r}$ için Wiener, Wiener Polarite, Hiper Wiener, Harary ve Karşılıklı Tamamlayıcı Wiener indeksleri nokta sayısına bağlı olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir. n . Harmonik sayı $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere,

$$(i) W(DK_{p,q,r}) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + \frac{r[3(r+3)(p+q) + r^2 - 13]}{6} + (r+1) + (p+q-2)(r+2) + (p-1)(q-1)(r+3)$$

$$(ii) W_p(DK_{p,q,r}) = p + q + r - 3$$

$$(iii) W_H(DK_{p,q,r}) = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(q-1)(q-2)}{2} + \frac{(r+3)(r+4)(p-1)(q-1)}{2} + \frac{(r+1)(r+2)}{24} [r(r-1) + 4(p+q)(r+3) - 12] + \frac{(r+2)(r+3)(p+q-2)}{2}$$

$$(iv) H(DK_{p,q,r}) = (p+q+r)H_r + \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} - r - \frac{r(p+q-2)-1}{r+1} + \frac{p+q-2}{r+2} + \frac{(p-1)(q-1)}{r+3}$$

$$(v) RCW(DK_{p,q,r}) = (p+q-4)H_{r+2} + \frac{p(p-1) + q(q-1) - 4}{2(r+3)} + (p-1)(q-1) - (p+q) + r + 6$$

İspat:

(i) K_p deki p tane nokta için Wiener indeks değeri ve K_q 'daki q tane nokta için Wiener indeks değeri (7)'den;

$$W(K_p) + W(K_q) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} \quad (56)$$

olur. P_r 'daki r tane nokta için Wiener indeks değeri (1)'den $W(P_r) = \frac{r(r^2-1)}{6}$ olur. P_r 'daki r tane noktanın K_p 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazıldığında

$$\begin{aligned} & [1 + (p-1).2] + [2 + (p-1).3] + \dots + [r + (p-1).(r+1)] \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + r) + (p-1)[2 + 3 + \dots + (r+1)] \\ &= \frac{r(r+1)}{2} + (p-1) \left[\frac{r(r+1)}{2} + r \right] \\ &= \frac{pr(r+1)}{2} + (p-1)r \\ &= \frac{r(pr+3p-2)}{2} \end{aligned} \quad (57)$$

olur. P_r 'deki r tane noktanın K_q 'daki noktalara uzaklıkları (57)'den yararlanarak

$$\frac{r(qr+3q-2)}{2} \quad (58)$$

biçimindedir. K_p 'deki $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_p}\}$ noktalarının K_q 'daki q tane noktalara uzaklıkları sırasıyla yazılırsa

V_{p_1} için $[(r+1) + (q-1)(r+2)]$

V_{p_2} için $[(r+2) + (q-1)(r+3)]$

V_{p_3} için $[(r+2) + (q-1)(r+3)]$

$\vdots$

V_{p_p} için $[(r+2) + (q-1)(r+3)]$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$= (r+1) + (q-1+p-1)(r+2) + (p-1)(q-1)(r+3)$$

$$= (r+1) + (p+q-2)(r+2) + (p-1)(q-1)(r+3) \quad (59)$$

bulunur. Böylece (1), (56), (57), (58) ve (59)'dan

$$W(DK_{p,q,r}) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + \frac{r[3(r+3)(p+q) + r^2 - 13]}{6} + (r+1) + (p+q-2)(r+2) + (p-1)(q-1)(r+3)$$

bulunur.

(ii) K_p 'nin P_r ile birleşim noktası hariç $(p-1)$ tane noktasının ve K_q 'nin P_r ile birleşim noktası hariç $(q-1)$ tane noktasının mesafesi 3'er birim olduğundan

$$(p-1) + (q-1) = p+q-2 \quad (60)$$

tane nokta çifti vardır. Birleşim noktaları dahil olacak şekilde P_{r+1+1} için

$$W_p(P_{r+2}) = r+2-3 = r-1 \quad (61)$$

olup (60) ve (61)'den

$$W_p(DK_{p,q,r}) = p+q+r-3$$

elde edilir.

(iii) K_p 'deki p tane nokta ve K_q 'daki q tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (7)'den

$$W_H(K_p) + W_H(K_q) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} \quad (62)$$

olur. P_r 'daki r tane nokta için Hiper Wiener indeks değeri (3)'den $W_H(P_r) = \frac{r(r+2)(r^2-1)}{24}$ biçimindedir. P_r 'daki r tane noktanın K_p 'deki noktalara uzaklıkları ve K_q 'daki noktalara uzaklıklarının Hiper Wiener indeks değeri (51)'den yararlanarak

$$\frac{(r+1)(r+2)(3p+pr-3)}{6} - (p-1) + \frac{(r+1)(r+2)(3q+qr-3)}{6} - (q-1) \quad (63)$$

olur. K_p 'deki $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_p}\}$ noktalarının K_q 'daki q tane noktalara uzaklıkları sırasıyla yazılırsa

$$V_{p_1} \text{ için } \frac{1}{2} [(r+1) + (r+1)^2 + (q-1)[(r+2) + (r+2)^2]]$$

$$V_{p_2} \text{ için } \frac{1}{2} [(r+2) + (r+2)^2 + (q-1)[(r+3) + (r+3)^2]]$$

$$V_{p_3} \text{ için } \frac{1}{2} [(r+2) + (r+2)^2 + (q-1)[(r+3) + (r+3)^2]]$$

⋮

$$V_{p_p} \text{ için } \frac{1}{2} [(r+2) + (r+2)^2 + (q-1)[(r+3) + (r+3)^2]]$$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$= \frac{1}{2} [(r+1) + (r+1)^2 + (q-1+p-1)[(r+2) + (r+2)^2] + (p-1)(q-1)[(r+3) + (r+3)^2]]$$

$$= \frac{1}{2} [(r+1)(r+2) + (r+2)(r+3)(p+q-2) + (r+3)(r+4)(p-1)(q-1)] \quad (64)$$

elde edilir.

Böylece (3), (62), (63) ve (64)'den

$$W_H(DK_{p,q,r}) = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(q-1)(q-2)}{2} + \frac{(r+3)(r+4)(p-1)(q-1)}{2} + \frac{(r+1)(r+2)}{24} [r(r-1) + 4(p+q)(r+3) - 12] + \frac{(r+2)(r+3)(p+q-2)}{2}$$

bulunur.

(iv) K_p 'deki p tane nokta ve K_q 'daki q tane nokta için Harary indeks değeri (7)'den

$$H(K_p) + H(K_q) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} \quad (65)$$

olur. P_r 'daki r tane nokta için Harary indeks değeri (4)'dan $H(P_r) = r(H_r - 1)$ biçimindedir. P_r 'daki r tane noktanın K_p 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazıldığında

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1} + (p-1)\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} + (p-1)\frac{1}{3} \right] + \dots + \left[\frac{1}{r} + (p-1)\frac{1}{r+1} \right] \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right) + (p-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r+1} \right) \\ &= pH_r - \frac{r(p-1)}{r+1} \end{aligned} \quad (66)$$

olur. P_r 'daki r tane noktanın K_q 'daki noktalara uzaklıkları (52)'den

$$q \cdot H_r - \frac{r(q-1)}{r+1} \quad (67)$$

biçimindedir. K_p 'deki $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_p}\}$ noktalarının K_q 'daki q tane noktalara uzaklıkları sırasıyla yazılırsa

$$\begin{aligned} & V_{p_1} \text{ için } \left[\frac{1}{r+1} + (q-1)\frac{1}{r+2} \right] \\ & V_{p_2} \text{ için } \left[\frac{1}{r+2} + (q-1)\frac{1}{r+3} \right] \\ & V_{p_3} \text{ için } \left[\frac{1}{r+2} + (q-1)\frac{1}{r+3} \right] \\ & \vdots \\ & V_{p_p} \text{ için } \left[\frac{1}{r+2} + (q-1)\frac{1}{r+3} \right] \\ & \text{olup tüm bu değerler toplandığında} \\ &= \frac{1}{r+1} + (q-1+p-1)\frac{1}{r+2} + (p-1)(q-1)\frac{1}{r+3} \\ &= \frac{1}{r+1} + \frac{p+q-2}{r+2} + \frac{(p-1)(q-1)}{r+3} \end{aligned} \quad (68)$$

bulunur.

Böylece (7), (4), (65), (66), (67) ve (68)'den

$$H(DK_{p,q,r}) = (p+q+r)H_r + \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} - r - \frac{r(p+q-2)-1}{r+1} + \frac{p+q-2}{r+2} + \frac{(p-1)(q-1)}{r+3}$$

eşitliği bulunur.

(v) $DK_{p,q,r}$ çift uçurtma grafi için $diam(DK_{p,q,r}) = (r-1) + 2 + 2 = r+3$ olur. Böylece,

$$RCW(DK_{p,q,r}) = \sum_{u,v \in V(DK_{p,q,r})} \frac{1}{r+4-d_{DK_{p,q,r}}(u,v)}$$

biçiminde olur. K_p 'de ve K_q 'da tüm nokta çiftleri arası 1 birim olduğundan

$$\binom{p}{2} \frac{1}{r+4-1} + \binom{q}{2} \frac{1}{r+4-1} = \frac{p(p-1) + q(q-1)}{2(r+3)} \quad (69)$$

eşitliği elde edilir. K_p 'deki $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_p}\}$ noktalarının K_q 'daki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazılırsa

$$\begin{aligned} & V_{p_1} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-(r+1)} + (q-1)\frac{1}{r+4-(r+2)} \right) = \frac{1}{3} + \frac{q-1}{2} \\ & V_{p_2} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-(r+2)} + (q-1)\frac{1}{r+4-(r+3)} \right) = \frac{1}{2} + (q-1) \\ & V_{p_3} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-(r+2)} + (q-1)\frac{1}{r+4-(r+3)} \right) = \frac{1}{2} + (q-1) \\ & \vdots \\ & V_{p_p} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-(r+2)} + (q-1)\frac{1}{r+4-(r+3)} \right) = \frac{1}{2} + (q-1) \end{aligned}$$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$\frac{1}{3} + \frac{(q-1)}{2} + (p-1) \left[\frac{1}{2} + (q-1) \right]$$

$$= (p-1)(q-1) + \frac{p+q}{2} - \frac{2}{3} \quad (70)$$

elde edilir. P_r 'deki $\{V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_r}\}$ noktalarının K_p 'deki noktalara uzaklıkları sırasıyla yazılırsa

$$V_{r_1} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-1} + (p-1) \frac{1}{r+4-2} \right) = \frac{1}{r+3} + \frac{p-1}{r+2}$$

$$V_{r_2} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-2} + (p-1) \frac{1}{r+4-3} \right) = \frac{1}{r+2} + \frac{p-1}{r+1}$$

$$\vdots$$

$$V_{r_{r-1}} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-(r-1)} + (p-1) \frac{1}{r+4-r} \right) = \frac{1}{5} + \frac{p-1}{4}$$

$$V_{r_r} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-r} + (p-1) \frac{1}{r+4-(r+1)} \right) = \frac{1}{4} + \frac{p-1}{3}$$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$\frac{1}{r+3} + \left(\frac{p}{r+2} + \frac{p}{r+1} + \dots + \frac{p}{4} \right) + \frac{p-1}{3}$$

$$= \frac{1}{r+3} + p \left(H_{r+2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{p-1}{3}$$

$$= \frac{1}{r+3} + pH_{r+2} - \frac{3p}{2} - \frac{1}{3} \quad (71)$$

olur. P_r 'deki $\{V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_r}\}$ noktalarının K_q 'daki noktalara uzaklıkları (71)'den

$$\frac{1}{r+3} + qH_{r+2} - \frac{3q}{2} - \frac{1}{3} \quad (72)$$

biçiminde olur. P_r 'deki $\{V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_r}\}$ nokta çiftleri arası uzaklıklar sırasıyla yazılırsa

$$V_{r_1} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-1} + \frac{1}{r+4-2} + \dots + \frac{1}{r+4-(r-2)} + \frac{1}{r+4-(r-1)} \right)$$

$$V_{r_2} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-1} + \frac{1}{r+4-2} + \dots + \frac{1}{r+4-(r-2)} \right)$$

$$\vdots$$

$$V_{r_{r-1}} \text{ için } \left(\frac{1}{r+4-1} \right)$$

olup tüm bu değerler toplandığında

$$\frac{r-1}{r+3} + \frac{r-2}{r+2} + \frac{r-3}{r+1} + \dots + \frac{2}{6} + \frac{1}{5}$$

$$= \left(1 - \frac{4}{r+3} \right) + \left(1 - \frac{4}{r+2} \right) + \left(1 - \frac{4}{r+1} \right) + \dots + \left(1 - \frac{4}{6} \right) + \left(1 - \frac{4}{5} \right)$$

$$= (r-1) - 4 \left(\frac{1}{r+3} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= (r-1) - 4H_{r+3} + 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$= r + \frac{22}{3} - 4H_{r+3}$$

$$= r + \frac{22}{3} - \frac{4}{r+3} - 4H_{r+2} \quad (73)$$

olur. (69), (70), (71), (72) ve (73) den

$$RCW(DK_{p,q,r}) = (p+q-4)H_{r+2} + \frac{p(p-1) + q(q-1) - 4}{2(r+3)} + (p-1)(q-1) - (p+q) + r + 6$$

olarak bulunur.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada öncelikle graf teori ile ilgili gerekli bazı temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra en çok bilinen Wiener tipinde mesafe bazlı topolojik indeksler ve tam graf bazlı yapıya sahip bazı özel graflar tanıtılmıştır. n noktalı yol graf P_n ve tam graf K_n graflarının literatürde kolaylıkla bulabileceğimiz Wiener tipinde topolojik indeksleri mertebelerine bağlı olacak biçimde hesaplanmıştır ve devamında yaygın şekilde üzerinde çalışılan tam graf bazlı özel graf türlerinin 6 tane Wiener tipinde topolojik indeksleri graf parametrelerine dayalı biçimde hesaplanmıştır. Ayrıca ananas, deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi grafların, tam tırtıl grafların özel durumları olduğu belirtilerek, tam tırtıl graflar için de Wiener tipinde topolojik indeksler graf parametrelerine dayalı biçimde elde edilmiştir. Bu çalışma ile literatürde iyi bilinen tam graf bazlı 6 özel graf çeşidi için en çok kullanılan 6 adet Wiener tipinde mesafe bazlı topolojik indeksleri hesaplanmış ve bunlarla ilgili bulunan bazı eşitlikler; bundan sonra yapılacak çalışmalara temel oluşturacak ve ileriki çalışmalara katkı sağlayacaktır.

Kaynakça

- [1] Chartrand G., Zhang P. 2012 A first course in graph theory. Dover publications inc., Mineola, New York, 450s.
- [2] Wiener H. 1947. Structural determination of paraffin boiling points. J. Am. Chem. Soc., 69(1947), 17-20.
- [3] Xu K., Liu M., Das K.C., Gutman I., Furtula B. 2014. A survey on graphs extremal with respect to distance-based topological indices. MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 71(2014), 461-508.
- [4] Birgin K. 2024. Grafların topolojik indeksleri ve kimyasal uygulamaları. Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, 109s, Nevşehir.
- [5] Topcu H., Sorgun S., Haemers W.H. 2016. On the spectral characterization of pineapple graphs. Linear Algebra and its Applications, 507(2016), 267-273.
- [6] Topcu H., Sorgun S., Haemers W.H. 2019. The graphs cospectral with the pineapple graph. Discrete Applied Math., 269(2019), 52-59.
- [7] Aouchiche M., Caporossi G., Hansen P. 2007. Variable neighborhood search for extremal graphs, 27. families of extremal graphs. <https://www.gerad.ca/fr/papers/G-2007-87.pdf> (Erişim tarihi:14.01.2025)
- [8] Topcu H., Sorgun S. 2018. The kite graph is determined by its adjacency spectrum. Applied Math. and Comput., 330(2018), 134-142.
- [9] Randić M. 1993. Noval molecular descriptor for structure-property studies. Chem. Phys. Let., 211(1993), 478-483.
- [10] Klein D. J., Lukovits I., Gutman I. 1995. On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures. J. Chem. Inf. Comput. Sci., 35(1995), 50-52.
- [11] Plavšić D., Nikolić S., Trinajstić N., Mihalić Z. 1993. On the Harary index for the characterization of chemical graphs. J. Math. Chem., 12(1993), 235-250.
- [12] Ivanciuc O., Balaban T. S., Balaban A. T. 1993. Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices. J. Math. Chem., 12(1993), 309-318.
- [13] Ivanciuc O. 2000. QSAR comparative study of Wiener descriptors for weighted molecular graphs. J. Chem. Inf. Comput. Sci., 40(2000), 14212-1422.
- [14] Ivanciuc O., Ivanciuc T., Balaban A. T. 2000. The complementary distance matrix, a new molecular graph metric. ACH Models chem., 137(2000), 57-82.
- [15] Gutman I., Furtula B., Petrović M. 2009. Terminal Wiener index. J. Math. chem. 46(2009), 522-531.