Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD 16 (2016) 021304(256-264) AKU J. Sci. Eng. 16 (2016) 021304(256-264)
DOI: 10.5578/fmbd.28092

Araştırma Makalesi / Research Article

Bazı Tensör Alanlarına Sahip Hemen Hemen α-Kenmotsu Manifoldları Üzerine

Hakan Öztürk[1]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon Meslek Yüksekokulu Ali Çetinkaya Kampüsü, Afyonkarahisar.*
e-posta:hozturk@aku.edu.tr.

Geliş Tarihi: 13.07.2016; Kabul Tarihi: 31.08.2016

Anahtar kelimeler
Hemen hemen α-Kenmotsu manifold; Yarı simetrik manifold; Konformal flat; η-paralellik.

Özet

Bu makalede φh η-paralel tensör alanlı hemen hemen α-Kenmotsu manifoldların projektif, konformal ve konsirküler flat durumlarındaki geometrisi incelendi. Makalenin sonunda α'ya bağlı olarak hemen hemen α-Kenmotsu manifoldlar üzerinde örnekler inşa edildi.

On Almost α-Kenmotsu Manifolds with Some Tensor Fields

Keywords
Almost α-Kenmotsu manifold; Semi-symmetric manifold; Conformally flat; η-parallelity.

Abstract

We study the geometry of almost α-Kenmotsu manifolds when they are projectively, conformally (Weyl) and concircularly flat with η-parallel tensor φh and we give illustrating examples on almost α-Kenmotsu manifolds with respect to α.

1. Giriş

Hemen hemen değme manifoldlar kavramı manifold teorisinde oldukça önemli bir değere sahiptir. Bir diferensiyellenebilir C^∞ sınıfından $(2n+1)$-boyutlu M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M manifolduna hemen hemen değme manifold adı verilir. Bu tanıma denk olarak bir hemen hemen değme yapısı belirli şartları sağlayan (φ,ξ,η) üçlüsü ile de verilebilir (Yano ve Kon 1984). Literatürde hemen hemen değme yapılar üzerinde oldukça fazla sayıda tanımlama yapılmış ve kosimplektik, hemen hemen kosimplektik, Sasakian, Quassi Sasakian, Kenmotsu, hemen hemen Kenmotsu gibi birçok farklı türü ele alınmıştır. Kenmotsu manifoldları olarak adlandırılan manifoldlar ilk kez 1972 yılında K. Kenmotsu tarafından çalışılmıştır (Kenmotsu 1972). Ayrıca, Tanno bir çalışmasında otomorfizma grupları maksimum boyutlara ulaşan hemen hemen değme Riemann manifoldlarının üç sınıfından birini inşa etmiştir (Tanno 1969). Bir Kenmotsu manifoldunu $d\eta=0$ ve $d\Phi=2\eta\Lambda\Phi$ şartlarını sağlayan bir normal hemen hemen değme metrik manifold olarak tanımlayabiliriz. Kenmotsu manifoldları her X ve Y vektör alanları için $(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X$ eşitliği yardımıyla Levi-Civita konneksiyonu sayesinde karakterize edilebilmesiyle iyi bilinir. Kenmotsu tarafından ele alınan bu yapı bazı tensör denklemleriyle verilen warped çarpım olarak adlandırılan özel bir çarpımla yakından ilgilidir. Yazar herhangi bir M^{2n+1} manifoldunun lokal bir $(-\varepsilon,+\varepsilon)\times_f N^{2n}$ warped çarpımına sahip olduğunu ispatlamıştır. Burada N^{2n} bir Kaehler manifoldu ve c bir pozitif sabit olmak üzere $f(t) = ce^t$ dir.

Bundan başka, lokal simetrik Kenmotsu manifoldları -1 sabit eğriliğine sahiptir ve burada lokal simetri kavramı Kenmotsu manifoldları için güçlü bir kısıtlamadır. Eğer Kenmotsu manifoldları Nomizu şartı olarak bilinen $R.R = 0$ denlemini sağlıyorsa o zaman manifold negatif sabit eğriliğe sahiptir ve aynı zamanda manifold konformal flat ise manifoldun boyutunun 3 den büyük olması durumunda -1 negatif sabit uzay eğriliğine sahip olduğu ispatlanmıştır (Kenmotsu 1972).

Yarı simetrik manifold kavramı her X, Y vektör alanları için $R(X,Y) \cdot R = 0$ denklemiyle tanımlanmaktadır (Nomizu 1968). Burada $R(X,Y)$, R üzerinde türev gibi davranmaktadır. Burada uzayın yarı simetrik olarak adlandırılmasının sebebi bir $p \in M$ noktasında (M, g) nin eğrilik tensörü olan R_p; p noktalarına bağlı olarak değişebilen simetrik uzayın eğrilik tensörü ile aynıdır. Böylece lokal simetrik uzaylar açık bir şekilde yarı simetrik olmasına rağmen bu önermenin tersi her zaman doğru değildir (Bagewadi ve Venkatesha 2007), (Calvaruso ve Perrone 2002). Bu manifoldlarla ilgili gerçek bir sınıflandırma Szabó tarafından verilmiştir (Szabo, 2002). Öte yandan yarı simetrik özel Riemann manifoldlarının incelenmesi oldukça ilginç sonuçlar ortaya koymuştur. Aslında tarihsel literatür dikkate alındığında Nomizu şartı olarak bilinen $R \cdot R = 0$ ilk kez Nomizu tarafından dile getirilmiştir (Nomizu 1968). Eğer M^{n}, $R^{\mathrm{n+1}}$ Öklid uzayının bir tam bağlantılı yarı simetrik hiperyüzeyi $(n > 3)$ yani, $R \cdot R = 0$ ise M^{n} lokal simetriktir. Yani, $\nabla R = 0$ dır. Ayrıca, Ogawa bir kompakt Kaehler manifoldunun yarı simetrik olduğunda lokal simetrik şartını sağladığını göstermiştir (Ogawa 1977).

Bundan başka, değme yapılar düşünüldüğünde, Tanno tam yarı simetrik veya Ricci yarı simetrik K-değme manifoldların mevcut olmadığını ispatlamıştır (Tanno 1969). K-değme manifoldları birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Bagewadi et al. 2007), (Perrone et al. 2002).

Tüm eğrilik tensörleri gözönüne alındığında R Riemann eğrilik tensöründen sonra en önemli tensör alanları Weyl konformal eğrilik tensörü C, projektif eğrilik tensörü P ve konsirküler eğrilik tensörü $\bar{C}$ olarak bilinir. Dolayısıyla pek çok yazar bu tensörleri veya bunlar tarafından tanımlanan tensör çarpımlarını isimleri, sırasıyla, konformal yarı simetrik, projektif yarı simetrik, konsirküler yarı simetrik olan $R(X,Y) \cdot C = 0$, $R(X,Y) \cdot P = 0$, $R(X,Y) \cdot C = 0$ tensörlerini ele almıştır (Bagewadi et al. 2007). Burada $R(X,Y)$ manifoldun her bir noktasındaki tensör cebirinin türevi olarak alınmıştır.

Pastore ve Dileo lokal simetrik hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını ele almıştır (Dileo ve Pastore 2009). Yazarlar lokal simetrik hemen hemen Kenmotsu manifoldunun $K = -1$ kesit eğriliğine sahip bir Kenmotsu manifoldu olduğunu ispatlamış ve bu duruma denk olan önermenin $h = 0$ olduğunu dile getirmişlerdir. Eğer $M^{\mathrm{2n+1}}$ manifoldu bir sabit kesit eğriliğe sahip değilse o zaman h tensör alanı sıfırdan farklı ve manifoldun rankı 1 den büyük olmalıdır (Dileo ve Pastore 2009).

Son zamanlarda hemen hemen değme metrik yapının özel bir hali olan $d\eta = 0$, $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$ ile verilen hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar Murathan ve arkadaşları tarafından farklı şekillerde ele alınmıştır (Aktan et al. 2014), (Öztürk et al. 2014). Özellikle α nın tüm durumlarına göre çalışmalar yapılmıştır. Yani, α hem reel bir skaler hem de $M^{2\mathrm{n}+1}$ üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan diferensiyellenebilir bir fonksiyon olarak alınmıştır. Aşikar olarak normal bir hemen hemen α-kosimplektik manifold bir α-kosimplektik manifolddur. İlerideki bölümlerde dile getirileceği üzere, $h = (1/2)(L_\xi\varphi)$ veya $\varphi \circ h$ tensörleri manifold üzerindeki geometriyi incelemede oldukça yoğun bir öneme sahiptir. Bu makale α nın reel bir sabit olması durumunda hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu üzerinde bazı tensör alanları yardımıyla belli bazı temel sonuçları elde etmeye adanmıştır.

Bu makalede hemen hemen α-Kenmotsu manifoldun sırasıyla, projektif, konformal ve konsirküler flat olmaları durumunda ortaya çıkan geometri çalışılmıştır. Makalenin sonunda α bağlı olarak elde edilen hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu üzerinde iki temel örnek inşa edilmiştir.

2. Temel Kavramlar

Tanjant uzayın endomorfizmalarını bir φ tensör alanı ile taşıyan M^{2n+1} bir tek boyutlu hemen hemen değme manifold olsun. Karakteristik veya Reeb vektör alanı olarak adlandırılan ξ bir vektör alanı ve $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ ve $\eta(\xi) = 1$ şartlarını sağlayan η bir 1-form olmak üzere I özdeşlik dönüşümü $I: TM^{2n+1} \to TM^{2n+1}$ şeklinde tanımlıdır. Verilen tanımlamalardan dolayı $\varphi\xi = 0,\ \eta \circ \varphi = 0$ ve (1,1)-tipli φ tensör alanı sabit $2n$ rankına sahiptir (Blair, 2002). Bir $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldu $N = [\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi$ şeklinde tanımlanan φ tensör alanının Nijenhuis tensör alanı her X, Y vektör alanları için özdeş olarak sıfır olduğunda normal olarak adlandırılır. Bir M^{2n+1} manifoldu her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \qquad (2.1)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği oluşturur. Bu şekilde verilen g metriğine bir bağdaşabilir metrik denir ve $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ manifoldu bir hemen hemen değme metrik manifold olarak adlandırılır. (2.1) eşitliğinin bir sonucu olarak M^{2n+1} üzerinde her X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, \xi)$ elde edilir. Ayrıca $\Phi(X, Y) = g(\varphi X, Y)$ ile tanımlanan Φ 2-formu M^{2n+1} hemen hemen değme metrik manifoldunun temel 2-formu olarak adlandırılır. Bir $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme metrik manifoldu $d\eta = 0,\ d\Phi = 0$ eşitliklerini sağlıyorsa bir hemen hemen kosimplektik manifold olarak bilinir. Aynı $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ yapısı $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ şartlarını sağlıyorsa bir hemen hemen Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Normal bir hemen hemen Kenmotsu manifoldunun Kenmotsu manifoldu olduğu aşikardır. (φ, ξ, η, g) Kenmotsu metrik yapısı için

$$\eta^* = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\eta, \xi^* = \alpha\xi,\ \ \varphi^* = \varphi,$$

$$g^* = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)g, \alpha \neq 0, \alpha \epsilon IR, \qquad (2.2)$$

deforme yapıyı göz önüne alalım. Böylece $(\varphi^*, \xi^*, \eta^*, g^*)$ hemen hemen α-Kenmotsu yapısını elde ederiz. Bu deformasyona homotetik deformasyon adı verilir (Kim ve Pak 2005), (Olszak, 1989).

Tanım 2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in IR$, $\alpha \neq 0$ için, $d\eta = 0,\ d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ şartları geçerli ise M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu denir. Burada $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda, (2.2) homotetik deformasyonu yardımıyla M^{2n+1} üzerinde bir $(\varphi^*, \xi^*, \eta^*, g^*)$ hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim ve Pak 2005).

Şimdi A ve h tensör alanlarını $A = -\nabla\xi$ ve $h = (1/2)(L_\xi\varphi)$ şeklinde ele alalım. $A(\xi) = 0$ ve $h(\xi) = 0$ olduğu aşikardır. Bundan başka, A ve h simetrik operatörleri M^{2n+1} üzerinde her X, Y vektör alanları için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi^2X - \varphi hX, \qquad (2.3)$$

$$(\varphi \circ h)X + (h \circ \varphi)X = 0, \qquad (2.4)$$

$$(\varphi \circ A)X + (A \circ \varphi)X = -2\alpha\varphi, \qquad (2.5)$$

$$(\nabla_X\eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\varphi Y, hX), \qquad (2.6)$$

$$\delta\eta = -2\alpha n,\ \ tr(h) = 0, \qquad (2.7)$$

h tensör alanının sıfır olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\xi = -\alpha\varphi^2$ olmasıdır.

Şimdi biraz da Weyl konformal eğrilik tensöründen bahsedelim. Weyl konformal eğrilik tensörü uzay zamanının bir ölçümüdür ve R Riemann eğrilik tensöründen farklıdır. Weyl konformal eğrilik tensörü; Riemann tensöründe olduğu gibi aynı simetrilere sahip R Riemann tensörünün izi olmayan bileşenleridir. Bu eğrilik tensörünün en önemli belirgin özelliği metriğe göre konformal değişmeler altında değişmez kalmasıdır. Yani, bazı pozitif skalar k fonksiyonları için $g^{*}=kg$ eşitliği sağlanıyorsa Weyl konformal eğrilik tensörü $W^{*}=W$ eşitliğini sağlar. Başka bir değişle, konformal tensörün rolünü oynar. Bu sebepten kısaca konformal tensör de denir. İleriki bölümlerde kullanılacak önemli tanımları verelim:

Tanım 2.2. (M^{n},g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, bir lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$S:\chi(M^{\mathrm{n}})\times\chi(M^{\mathrm{n}})\to IR$$

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki S tensör alanına M^{n} üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrıca, (0,2)-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y)=g(QX,Y) \tag{2.9}$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.3. $(M^{2\mathrm{n}+1},g)$ bir Riemann manifoldu olsun. $M^{2\mathrm{n}+1}$ nin (1,3)-tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C, $M^{2\mathrm{n}+1}$ üzerindeki herhangi X,Y,Z vektör alanları için,

$$C(X,Y)Z \;=\; R(X,Y)Z-\left(\frac{1}{2n-1}\right)[S(Y,Z)X$$
$$-S(X,Z)Y+g(Y,Z)QX-g(X,Z)QY] \tag{2.10}$$
$$+(r/(2n(2n-1)))[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y],$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere ($c=divC$),

$$c(X,Y)=(\nabla_X Q)Y-(\nabla_Y Q)X$$
$$-\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)[((\nabla_X r)Y-\nabla_Y r)Y], \tag{2.11}$$

(Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.4. (M^{n},g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, bir lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r=\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i) \tag{2.12}$$

değerine M^{n} nin skalar eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Bir Riemann manifoldunun konformal flat olması için gerek şart Weyl eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olmasıdır. Uzayın boyutu 2 olduğunda Weyl tensörü sıfırdır. Boyutun 4 ve 4 den büyük olduğu durumlarda Weyl tensörü genellikle sıfırdan farklıdır. $n\geq 4$ için Weyl tensörü sıfıra eşitse, metrik lokal konformal flattir. Böylece sabit tensörle orantılı olan bir metrik yardımıyla lokal bir koordinat sistemi mevcuttur. $n>3$ durumunda bu şart yeter şart olarak da söylenebilir. Boyutun 3 olması durumunda ise C nin divergens operatörü olan c nin özdeş olarak sıfır olması Riemann manifoldunun konformal flat olması için gerek ve yeter şarttır. Burada aşağıdaki teoremle durumları özetleyebiliriz:

Teorem 2.1. (M^{n},g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{n} nin konformal flat olması için gerek ve yeter koşul $n>3$ için $C=0$ ve $n=3$ için $c=0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.5. $(M^{2\mathrm{n}+1},g)$ bir Riemann manifoldu olsun. Her X,Y,Z vektör alanları için $M^{2\mathrm{n}+1}$ nin (1,3)-tipli konsirküler eğrilik tensör alanı $\bar{C}$ ve projektif eğrilik tensör alanı P,

$$\bar{C}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-(r/2n(2n+1))(g(Y,Z)$$
$$-g(X,Z)Y), \tag{2.13}$$

$$P(X,Y)Z=R(X,Y)Z-(1/2n)[S(Y,Z)X$$
$$-S(X,Z)Y], \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S Ricci tensörü ve $r=tr(S)$ skalar eğriliktir (Yano and Kon 1984).

3. Temel Eğrilik Özellikleri

Öztürk ve ark. (2014)'e göre hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu için aşağıda verilen temel eğrilik özellikleri elde edilmiştir:

$$R(X,Y)\xi = \alpha^2[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha[\eta(X)\varphi hY$$
$$-\eta(Y)\varphi hX] + (\nabla_Y\varphi h)X - (\nabla_X\varphi h)Y, \qquad (3.1)$$

$$R(X,\xi)\xi = \alpha^2\varphi^2X + 2\alpha\varphi hX - h^2X$$
$$+\varphi(\nabla_\xi h)X, \qquad (3.2)$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\varphi R(X,\xi)\xi - \alpha^2\varphi X - 2\alpha hX$$
$$-\varphi h^2X, \qquad (3.3)$$

$$R(X,\xi)\xi - \varphi R(\varphi X,\xi)\xi)$$
$$= 2[\alpha^2\varphi^2X - h^2X], \qquad (3.4)$$

$$S(X,\xi) = -2n\alpha^2\eta(X) - \big(div(\varphi h)\big)X, \qquad (3.5)$$

$$S(\xi,\xi) = -[2n\alpha^2 + tr(h^2)], \qquad (3.6)$$

Bundan başka, özellikle η-paralellik şartı için bundan sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız Öztürk ve ark. (2014) tarafından ispatlanan iki önemli önerme aşağıda verilmiştir:

Önerme 3.1. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu için φh tensör alanı η-paralel ise o zaman her X,Y vektör alanları için

$$(\nabla_X\varphi h)Y = \eta(X)[lY - \alpha^2\varphi^2Y - 2\alpha\varphi hY + h^2Y]$$
$$-\eta(Y)[\alpha\varphi hX - h^2X] - g(Y,\alpha\varphi hX - h^2X)\xi,$$
$$(3.7)$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 3.2. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu için φh tensör alanı η-paralel ise o zaman her X,Y vektör alanları için

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY, \qquad (3.8)$$

dir. Burada $l = R(.,\xi)\xi$, ξ karakteristik vektör alanına göre Jakobi operatörüdür.

Hatırlatma 3.1. Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde herhangi bir simetrik (1,1)-tipli E tensör alanı

$$g\big((\nabla_{X^T}E)Y^T,Z^T\big) = 0, \qquad (3.9)$$

şartını sağlıyorsa E tensör alanı η-paralel dir diye tanımlanır. Burada ξ ye dik olan tüm tanjant vektörleri X olmak üzere $X = X^T + \eta(X)\xi$ şeklinde tanımlıdır ve X^T; X in teğet kısmı, $\eta(X)\xi$ ise X in normal kısmı olarak ifade edilmiştir (Blair, 2002).

4. Hemen Hemen α-Kenmotsu Manifoldlar için Belli Bazı Flat Durumlar

Bu bölümde manifold yapımız için özellikle projektif, konformal ve konsirküler flat durumları göz önüne alınarak bazı durumlarda φh tensör alanına göre η-paralelliğin etkileri incelenecektir. Öncelikle araştırmamıza projektif flat durumuyla başlayalım.

$P = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde (2.14) eşitliği yardımıyla

$$R(X,Y)Z = \left(\frac{1}{2n}\right)[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y], \qquad (4.1)$$

yazılır. Buradan (4.1) eşitliği soldan herhangi bir W vektör alanı ile iç çarpılırsa

$$R(X,Y,Z,W) = \left(\frac{1}{2n}\right)[g(X,W)S(Y,Z)$$
$$- g(Y,W)S(X,Z)], \qquad (4.2)$$

elde edilir. Burada R Riemann eğriliği $g(R(X,Y)Z,W) = R(X,Y,Z,W)$ şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca (4.2) eşitliğinde $W = \xi$ alınırsa

$$\eta(R(X,Y)Z) = \left(\frac{1}{2n}\right)[\eta(X)S(Y,Z)$$
$$-\eta(Y)S(X,Z)], \qquad (4.3)$$

bulunur. Tekrardan (4.3) eşitliğinde $X = \xi$ denklemi yerine koyulur ve (3.1), (3.5) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$S(X,Y) = -2n[\alpha^2g(Y,Z) + 2\alpha g(\varphi Y,hZ)$$
$$+g(hZ,hY) + g((\nabla_\xi h)Z,\varphi Y)$$
$$+(1/2n)\eta(Y)(div(\varphi h))Z], \qquad (4.4)$$

eşitliğine ulaşılır.

M^{2n+1} üzerinde vektör alanlarının bir ortonormal bazı $\{E_1,\ldots,E_{2n},\xi\}$ şeklinde seçelim. (4.4) eşitliğinde $Y = Z = E_i$ alınarak $1 \le i \le 2n+1$

için i indisine göre toplam alındığında veya kontraksiyon yapıldığında

$$r = -2n[\alpha^2(2n+1) - 2\alpha\, tr(\varphi h) + tr(h^2)$$
$$-tr(\varphi(\nabla_\xi h)) + (1/2n)(div(\varphi h))\xi], \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada $r = S(E_i, E_i)$, $tr(\varphi h) = 0$ ve $(div(\varphi h))\xi = tr(h^2)$ dır. O halde bunları takiben (4.5) eşitliği göz önüne alınırsa

$$r = (2n+1)S(\xi,\xi) + 2n\, tr\left(\varphi\left(\nabla_\xi h\right)\right), \quad (4.6)$$

eşitliği yazılır. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1. Bir $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu projektif flat ise o zaman (4.6) eşitliğinde verilen bir skalar eğriliğe sahiptir.

Hatırlatma 4.1. Bir $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ α-Kenmotsu manifoldu projektif flat ise her X, Y, Z vektör alanları için

$$g(R(Z,\xi)\xi, Y) = \left(\frac{1}{2n}\right)[S(Y,Z) - \eta(Y)S(Z,\xi)], \quad (4.7)$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca,

$$R(Z,\xi)\xi = \alpha^2[\eta(Z)\xi - Z], \quad (4.8)$$
$$S(Z,\xi) = -2\alpha^2 n\eta(Z), \quad (4.9)$$

eşitlikleri yardımıyla (4.7) eşitliği

$$S(Y,Z) = -2n\alpha^2 g(Y,Z) \quad (4.10)$$

eşitliğine dönüşür. Bu nedenle aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

Teorem 4.2. Bir $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ projektif flat α-Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifoldudur.

Şimdi konformal eğrilik tensörünü kullanarak flat durum için φh η-paralellik şartının ortaya koyacağı etkilere bakalım.

C konformal eğrilik tensör alanı özdeş olarak sıfır olsun. Bu durumda (2.10) eşitliği yardımıyla

$$R(X,Y)Z = 1/(2n-1)[g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY$$
$$+S(Y,Z)X - S(X,Z)Y]$$
$$+\left(\frac{r}{2n(2n-1)}\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \quad (4.11)$$

yazılır. (4.11) göz önüne alındığında

$$R(X,Y,Z,W) = (1/(2n-1))[g(Y,Z)g(QX,W)$$
$$-g(X,Z)g(QY,W) + S(Y,Z)g(X,W) - S(X,Z)$$
$$g(Y,W)] + (r/(2n(2n-1)))[g(Y,Z)g(X,W)$$
$$-g(X,Z)g(Y,W)], \quad (4.12)$$

bulunur. (4.12) eşitliğinde $W = \xi$ alınırsa

$$\eta(R(X,Y)Z) = (1/(2n-1))[g(Y,Z)S(X,\xi)$$
$$-g(X,Z)S(Y,\xi) + \eta(X)S(Y,Z) - \eta(Y)S(X,Z)]$$
$$+(r/(2n(2n-1)))[\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)], \quad (4.13)$$

elde edilir. Benzer olarak, (4.13) eşitliğinde X yerine ξ seçilir ve (3.8) eşitliği birlikte kullanılırsa

$$S(Y,Z) = (2n-1)g(lY,Z) - [tr(l) + \left(\frac{r}{2n}\right)]$$
$$g(Y,Z) + \left[2tr(l) + \left(\frac{r}{2n}\right)\right]\eta(Y)\eta(Z), \quad (4.14)$$

yazılır. Burada (4.14)eşitliğinde $Y = Z = E_i$ için kontraksiyon yapılırsa ($i = 1, \ldots, 2n+1$),

$$r = (2n-1)tr(l) - (2n+1)\left[tr(l) + \left(\frac{r}{2n}\right)\right]$$
$$+\left[2tr(l) + \left(\frac{r}{2n}\right)\right], \quad (4.15)$$

elde edilir ki bu eşitlik sadeleştirildiğinde $r = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3. Bir $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ konformal flat hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu ϕh tensör alanına göre η-paralel ise o zaman bu manifold sıfır skalar eğriliğine sahiptir.

Son olarak, $\bar{C}$ konsirküler eğrilik tensörünü göz önüne alalım ve konsirküler flat durumunu inceleyelim.

İlk olarak, $\bar{C} = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$R(X,Y)Z = \frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \quad (4.16)$$

yazılır. (4.16) eşitliğinden

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y,Z)g(X,W)$$
$$-g(X,Z)g(Y,W)], \qquad (4.17)$$

bulunur ve burada sırasıyla, $W=\xi$ ve $X=\xi$ alınarak

$$\eta(R(\xi,Y)Z)=(\frac{r}{2n(2n-1)})[g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)]$$
$$(4.18)$$

elde edilir. M^{2n+1} üzerinde vektör alanlarının bir ortonormal bazı $\{E_1,\ldots,E_{2n},\xi\}$ olmak üzere (4.18) eşitliğinde $Y=Z=E_i$ için $1\leq i\leq 2n+1$ indisine göre kontraksiyon yapılırsa

$$r=(2n+1)S(\xi,\xi), \qquad (4.19)$$

sonucuna ulaşılır. (3.8) ve (4.19) birlikte düşünüldüğünde

$$r=(2n+1)tr(l), \qquad (4.20)$$

elde edilir. Bundan dolayı aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3. Bir $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ konsirküler flat hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu ϕh tensör alanına göre η-paralel ise o zaman bu manifold (4.20) ile verilen bir skalar eğriliğe sahiptir.

5. Örnekler

5.1. 3-Boyutlu Hemen Hemen α-Kenmotsu Örneği

$IR^3(x,y,z)$ standart koordinat sistemi olmak üzere, 3-boyutlu $M\subset IR^3$ manifoldu

$$M=\{(x,y,z)\in R^3 \mid z\neq 0\},$$

biçiminde tanımlansın. IR^3 ün vektör alanları

$$e_1=(c_2e^{-\alpha z}cos\lambda z-c_1e^{-\alpha z}sin\lambda z)(\partial/(\partial x))$$
$$+(c_1e^{-\alpha z}cos\lambda z\ +c_2e^{-\alpha z}\ sin\lambda z)(\partial/(\partial y)),$$
$$e_2=-(c_1e^{-\alpha z}cos\lambda z+c_2e^{-\alpha z}sin\lambda z)(\partial/(\partial x))$$
$$+(c_2e^{-\alpha z}cos\lambda z-c_1e^{-\alpha z}\ sin\lambda z)(\partial/(\partial y)),$$
$$e_3=(\partial/(\partial z)),$$

olsun. Burada $c_1{}^2+c_2{}^2\neq 0$ olmak üzere, c_1,c_2,λ ve α birer sabittirler. $\{e_1,e_2,e_3\}$ cümlesinin M nin her bir noktasında lineer bağımsız olduğu açıktır ve M üzerinde

$$g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1,$$
$$g(e_1,e_2)=g(e_1,e_3)=g(e_2,e_3)=0,$$

şeklinde tanımlanan bir g metriği

$$g=\frac{1}{f_1^2+f_2^2}(dx\otimes dx+dy\otimes dy)+dz\otimes dz,$$

tensörel çarpımla verilebilir. Burada f_1 ve f_2 fonksiyonları

$$f_1=c_2e^{-\alpha z}cos\lambda z-c_1e^{-\alpha z}sin\lambda z,$$
$$f_2=c_1e^{-\alpha z}cos\lambda z\ \ +c_2e^{-\alpha z}\ sin\lambda z,$$

olarak alınmıştır.

Şimdi, M nin üçlüsünü inşa edelim. η, her X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,e_3)$ ve (1,1)-tipli tensör alanı φ, $\varphi(e_1)=e_2,\varphi(e_2)=-e_1,\varphi(e_3)=0$ ile tanımlansın. Ayrıca, (1,1)-tipli simetrik tensör alanı h, $h(e_1)=-\lambda e_1,h(e_2)=\lambda e_2,h(e_3)=0$ şeklinde verilsin. M üzerinde g ve φ nin lineer özelliği göz önüne alındığında

$$\varphi^2X=-X+\eta(X)e_3), \qquad \eta(e_3)=1,$$
$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),$$

olduğu görülür. Bundan başka, g metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere

$$[e_1,e_3]=\alpha e_1+\lambda e_2, \qquad [e_2,e_3]=\lambda e_1+\alpha e_2,$$
$$[e_1\ ,e_2]=0,$$

yazılır. Bunları takiben (φ,ξ,η,g) matematiksel yapısı kolayca elde edilebilir. Fakat M nin Φ temel 2-formunun sadece sıfırdan farklı bileşenlerinin varlığını göstermemiz yeterli olacaktır. Bu durumda Φ nin tanımından

$$\Phi(\partial/\partial x,\partial/\partial y)=-\Phi(\partial/\partial y,\partial/\partial x),$$
$$-(1/(f_1{}^2+f_2{}^2))=-((e^{2\alpha z})/(c_1{}^2+c_2{}^2)),$$

bulunur ve buradan

$$\Phi=-((2e^{2\alpha z})/(c_1{}^2+c_2{}^2))(dx\wedge dy),$$

elde edilir. Φ nin dış türev tanımı yardımıyla

$$d\Phi=-((4\alpha e^{2\alpha z})/(c_1{}^2+c_2{}^2))(dx\wedge dy\wedge dz),$$

sonucuna ulaşılır. Bu son eşitlik $\eta=dz$ olduğundan M üzerinde $d\Phi=2\alpha(\eta\wedge\Phi)$ denklemini gerektirir. Burada N_φ Nijenhuis torsiyon tensörü sıfırdan farklıdır. Böylece (M,φ,ξ,η,g) yapısı bir hemen hemen α-Kenmotsu yapısıdır.

5.2. 3-Boyutlu α-Kenmotsu Örneği

IR^3 üzerinde standart koordinat sistemi (x,y,z) olmak üzere, 3-boyutlu $M\subset IR^3$ manifoldu

$M=\{(x,y,z)\in R^3\}$,

biçiminde tanımlansın. IR^3 ün vektör alanları

$e_1=f_1(z)(\partial/(\partial x))+f_2(z)(\partial/(\partial y))$,

$e_2=-f_2(z)(\partial/(\partial x))+f_1(z)(\partial/(\partial y))$,

$e_3=(\partial/(\partial z))$,

olsun. Burada

$f_1(z)=c_2e^{-\alpha z}$, $f_2(z)=c_1e^{-\alpha z}$,

ve $\alpha\neq 0$, ${c_1}^2+{c_2}^2\neq 0$ olmak üzere c_1,c_2,λ ve α birer sabittirler. Benzer olarak, Örnek 5.2 de kullanılan yöntem ile (φ,ξ,η,g) matematiksel yapısı kolayca elde edilebilir. O işlemleri tekrarlamama adına yapıyı ispatlamak için M nin Φ temel 2-formunun sadece sıfırdan farklı bileşenlerinin varlığını göstermek yeterli olacaktır. O halde Φ nin tanımından

$$\Phi(\partial/\partial x,\partial/\partial y)=-\Phi(\partial/\partial y,\partial/\partial x),$$

$$-(1/({f_1}^2+{f_2}^2))=-((e^{2\alpha z})/({c_1}^2+{c_2}^2)),$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi=-((2e^{2\alpha z})/({c_1}^2+{c_2}^2))(dx\wedge dy),$$

bulunur. Φ nin dış türev tanımı kullanılarak

$$d\Phi=-((4\alpha e^{2\alpha z})/({c_1}^2+{c_2}^2))(dx\wedge dy\wedge dz),$$

yazılır. $\eta=dz$ eşitliği geçerli olduğundan yukarıdaki eşitlik M üzerinde

$$d\Phi=2\alpha(\eta\wedge\Phi),$$

denklemini gerektirir. Dikkat edelim ki burada N_φ Nijenhuis tensör alanı özdeş olarak sıfırdır. Böylece (M,φ,ξ,η,g) bir α-Kenmotsu manifolddur.

6. Tartışma ve Sonuç

Son zamanlarda η-paralellik şartı bazı tensör alanları için oldukça önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır. φ tensör alanına göre η-paralellik Kaehler manifoldları ile bağlantılıdır. Genellikle yapılan çalışmalarda $h=(1/2)(L_\xi\varphi)$ tensör alanının değme ve hemen hemen değme yapılarda oldukça önemli bir rolü vardır. Örnek olarak, değme yapı K-değme manifold olduğunda h tensörünün sıfır olması Killing vektör alanı olmasına denktir. Böylece h tensör alanı η-paralel ise yukarıdaki örneğin doğru olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Özellikle Boeckx ve Cho η-paralelliği değme metrik yapılarda çalışmıştır (Boeckx ve Cho 2005).

Bu çalışmayı takiben Pastore ve Dileo özellikle lokal simetrik hemen hemen Kenmotsu manifoldları incelemişler ve ϕh tensör alanına göre η-paralelliğin etkilerini araştırmışlardır (Dileo ve Pastore 2009).

Murathan ve ark. (2014)'e göre Boeckx ve Dileo'nun yaptığı çalışmalar biraz daha genişletilerek hemen hemen α-kosimplektik ve çatılı yapılarda η-paralellik incelenmiştir.

Daha sonra yapacağımız makaleler hemen hemen α-Kenmotsu veya kosimplektik manifoldlarda lokal simetri ve yarı simetri şartlarına adanacak ve yapılan bu çalışma o makalelerde kullanılacaktır. Yani, flat durumlar daha sonra başka bir şekilde ele alınacaktır. Gelecek çalışmalardaki amacımız α nın tüm durumlarında diferensiyellenebilir fonksiyon durumları da dahil olmak üzere tüm yarı simetrik ve pseudo simetrik şartlar ile lokal simetri ve η-paralel durumlar arasındaki geometriyi araştırmaktır.

Kaynaklar

Kim, T. W. and Pak, H. K., 2005. Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug.,* **21(4)**, 841-846.

Boeckx, E. and Cho, J. T., 2005. η-parallel contact metric spaces. *Differential Geometry and its Applications*, **22**, 275-285.

Vaisman, I., 1980. Conformal changes of almost contact metric manifolds. *Lecture Notes in Math., Berlin-Heidelberg-New York,* **792**, 435-443.

Kenmotsu, K., 1972. A class of contact Riemannian manifold, *Tôhoku Math. Journal,* **24** , 93-103.

Blair, D. E., 2002. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics, Boston.

Bagewadi, C. S. and Venkatesha, 2007. Some curvature tensors on a trans-Sasakian manifold, *Turkish Journal of Math.,* **31**, 111-121.

Calvaruso, G. and Perrone, D., 2002. Semi-symmetric contact metric three-manifolds, *Yokohama Math. Journal.,* **49**, 149-161.

Yano, K. and Kon, M., 1984. Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

Aktan, N., Yıldırım M. and Murathan, C., 2014. Almost f-cosymplectic manifolds, *Mediterranean Journal of Math.,* **11**, 775-787.

Öztürk, H., Aktan, N., Murathan, C. And Vanlı, A. T., 2014. Almost α-Cosymplectic f-Manifolds, *The Journal of Alexandru Ioan Cuza University*, **60 (1)**, 211-226.

Tanno, S., 1969. The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, *Tôhoku Math. Journal*, **21**, 21-38.

Nomizu, K., 1968. On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor, *Tôhoku Mat. Journal,* **20**, 46-69.

Szabó, Z. I., 1982. Structure theorem on Riemannian spaces satisfying R.R=0, *Journal of Differential Geometry,* **17**, 531-582.

Ogawa, Y., 1977. A condition for a compact Kaehlerian space to be locally symmetric, *Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.,* **28**, 21-23.

Dacko, P. and Olszak, Z., 1998. On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Keahlerian leaves, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, **56(1)**, 89-103.

Olszak, Z., 1989. Locally conformal almost cosymplectic manifolds, *Coll. Math. Journal*, **57**, 73--87.

Dileo, G. and Pastore, A. M., 2009. Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η-parallelism. *Differential Geometry and İts Applications*, **27**, 671-679.