[Araştırma Makalesi / Research Article]

Kastamonu Eğitim Dergisi
Kastamonu Education Journal
Mayıs 2019 Cilt:27 Sayı:3
kefdergi.kastamonu.edu.tr

Başvuru Tarihi/Received: 10.05.2018
Kabul Tarihi/Accepted: 17.07.2018
DOI: 10.24106/kefdergi.3056

Farklı Öğretim Yolları Kullanılarak Tasarlanan Bir Öğrenme Ortamının Matematiksel Muhakemeye ve Matematik Tutumuna Etkisi[1]

The Effect of a Learning Environment Designed Using Different Teaching Ways on Mathematical Reasoning and Mathematics Attitude

Emrullah ERDEM[2], Yasin SOYLU[3]

Öz

Bu araştırmanın amacı, farklı öğretim yolları kullanılarak zenginleştirilen bir öğrenme ortamının matematiksel muhakemeye ve matematik tutumuna etkisini belirlemektir. Çalışma, Türkiye'deki bir il merkezinden rastgele seçilen bir devlet ortaokulunda okuyan 27 yedinci sınıf öğrencisinin katılımıyla yürütülmüştür. Tasarlanan öğrenme ortamında kesirler ve tamsayılar konularının öğretimi; eğitsel oyunlar, somut materyaller, karikatürler ve bilgisayar destekli uygulamalar kullanılarak, günlük yaşamla ilişkilendirilerek ve işbirlikli heterojen gruplarla tartışılarak sekiz hafta boyunca (toplam 32 ders saati) gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verileri, öğrencilerin Matematiksel Muhakeme Testi (MMT)'ne ve Matematik Tutum Ölçeği (MTÖ)'ne öntest ve sontestte verdikleri cevaplardan elde edilmiştir. MMT ve MTÖ'ye verilen cevaplar Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi kullanılarak analiz edilmiştir. Yapılan analizler; bu öğrenme ortamında yapılan müdahalenin öğrencilerin matematiksel muhakemelerini anlamlı düzeyde geliştirdiğini ve öğrencilerin matematiğe ilişkin tutumlarını anlamlı düzeyde iyileştirdiğini göstermiştir. Öte yandan, işbirlikli gruplarda sunulan açık uçlu problemler sayesinde öğrencilerin cevap seçeneklerine odaklanmak yerine bir çözüm sunmaya çalıştığı, çözümünü açıkladığı, grup arkadaşlarıyla tartışarak farklı stratejiler geliştirdikleri ve bu sayede daha fazla matematiksel muhakemede bulundukları gözlenmiştir. Bu sonuç, matematiksel muhakemeyi belirlemede, değerlendirmede ve geliştirmede açık uçlu problemlerin kullanılması gerektiğinin altını çizmektedir.

Anahtar Kelimeler: öğrenme ortamı tasarımı, matematiksel muhakeme, matematik tutumu, yedinci sınıf öğrencileri, açık uçlu problemler

Abstract

The purpose of this research is to determine the effect of a learning environment enriched by using different teaching ways on mathematical reasoning and mathematics attitude. The study was carried out with the participation of 27 seventh-grade students who study at a state middle school randomly selected from a city center in Turkey. Instruction of fractions and integers was performed in the designed learning environment for 8 weeks (32 lesson hours in total) by using educational games, concrete materials, cartoons, computer-aided applications, and associating with daily life and discussing in cooperative heterogeneous groups. The data were obtained from students' responses to the Mathematical Reasoning Test (MRT) and the Mathematical Attitude Scale (MAS) on pretest and posttest. Responses to MRT and MAS were analyzed using the Wilcoxon Signed Ranks Test. Analyzes have shown that the intervention in this environment improves students' mathematical reasoning significantly and improves their attitudes towards mathematics to a significant degree. It has been observed that through open-ended problems presented in cooperative groups, instead of focusing on the answer options, students tried to provide a solution, explaining the solution, discussing it with their group friends, developing different strategies and thus they were found to have more mathematical reasoning. This result underscores the need to use open-ended problems in determining, evaluating, and improving mathematical reasoning.

Keywords: designing learning environment, mathematical reasoning, mathematics attitude, seventh grade students, open-ended problems

1. Bu çalışma, ikinci yazarın danışmanlığında birinci yazar tarafından hazırlanan doktora tezinin bir bölümünden oluşmaktadır. Çalışma ayrıca International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST-2017) kongresinde bildiri olarak sunulmuştur.

2. Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Adıyaman, Türkiye; https://orcid.org/0000-0002-6588-5431

3. Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Erzurum, Türkiye; https://orcid.org/0000-0003-0906-4994

Atıf / Citation: Erdem, E., & Soylu, Y. (2019). Farklı öğretim yolları kullanılarak tasarlanan bir öğrenme ortamının matematiksel muhakemeye ve matematik tutumuna etkisi. Kastamonu *Education Journal, 27*(3), 1273-1290. doi:10.24106/kefdergi.3056

Extended Summary

Purpose: Developing mathematical reasoning is the core of learning and teaching mathematics (Ball and Bass, 2003). If the individuals' reasoning skills are not developed, mathematics becomes a set of rules learned without meaning (Ross, 1998). The middle school mathematics curriculum (MEB, 2013) suggests to prepare appropriate environments for the development of reasoning skill in the mathematics teaching process. On the other hand, because reasoning requires a high level of mental effort, there is a prejudice against mathematics in the society. This prejudice is also reflected in the educational environment and leads to students' fear of mathematics. It is inevitable that this prejudice about mathematics will arise if the teaching carried out in schools is based on traditional approaches. In this context, it is thought that thanks to the educational games that attract students and create entertainment, computer-aided applications that attract attention and offer the opportunity to use technology, cartoons that are the foreground of your visuals and humor, concrete materials that give a sense of visuality and activity, associations with daily life that enable students to understand the world and to make mathematical relations, constructive discussions in cooperative heterogeneous groups that are possible to learn from each other, open-ended problems that lead to high-level thinking, mathematical reasoning will develop and thanks to the different and fun methods used, students' attitude towards mathematics will improve. The aim of this research is to determine the effect of a learning environment designed using different teaching ways on the mathematical reasoning and mathematics attitudes of 7th grade students.

Methodology: Since this study examines the effect of different teaching ways on mathematical reasoning and attitude, one-group pretest-posttest model was used. The research is also a case study because the process related to a group at the 7th grade level has been studied for a long time with different dimensions. The study was carried out with the participation of 27 seventh-grade students studying at a state school randomly selected from a city center in Turkey. The Mathematical Reasoning Test (MRT) which was developed by researcher and included problems that require reasoning about integers and fractions and the Mathematical Attitude Scale (MAS) developed by Aşkar (1986) were used as data collection tools. Academicians and teachers were asked whether the questions required reasoning, whether they were appropriate for the 7th grade level, and whether they were related to integers and fractions. The MRT consisting of 24 items was applied to 27th grade students in real practice and the Cronbach's alpha coefficient of the test was calculated as .863. The MAS consisting of 20 items used to determine whether the students' attitudes towards mathematics changed at the end of the process. It can be said that high score of the scale shows positive attitude towards mathematics and low score shows negative attitude. The Cronbach's alpha coefficient is calculated to determine if that is a reliable scale that can be applied to these students. As a result of the analysis, the Cronbach's alpha coefficient for MAS was determined as .924.

The researcher has performed the teaching of the integers and fractions according to learning outcomes in the Middle School Mathematics (5, 6, 7 and 8) Curriculum (MEB, 2013) for a total of 8 weeks (32 class hours) using the different methods. The reason for studying two subjects in the study is that mathematical reasoning, which is a basic skill, can not develop during the teaching of one subject, and that the attitude towards mathematics can not change in a short time. Since the teaching of the two subjects is longer than the one topic, it is thought that the development of mathematical reasoning and the change of attitudes of the students can be better detected during the teaching of the two subjects. The scoring scale developed by Erdem (2011) was used in the analysis of the answers given to the questions in the MRT. In this scoring scale, the score of each problem ranges from 0 to 5 points. Two experienced mathematics educators who participated in the MRT scoring scored the answers to the questions separately for the pre-test and post-test. Wilcoxon signed-rank test was used for both pretest-posttest comparisons because the both data were not normally distributed. In addition, students' mathematical reasoning levels were determined according to the point average of MRT.

Findings, Discussion and Conclusions: As a result of the study, it was determined that 7th grade students' mathematical reasoning significantly developed in the learning environment. It was observed that a) open-ended problems that can not be immediately solved, b) encouraging students to explain and justify their solutions, c) allowing them to reach the right result, d) allowing students to reach their right through the wrongs, e) encouraging the use of different solution strategies when solving problems were also effective in the development of mathematical reasoning. It was also found out that the designed learning environment significantly improved the attitudes of the 7th grade students towards mathematics. Another result from the student responses is that the mathematics teacher's opinions about students' mathematics success (low, middle, high) and the mathematics course grades do not always parallel the mathematical reasoning. From the results of the research, (1) open-ended problems that can not be immediately solved can be used to determine, evaluate and develop mathematical reasoning, (2) to find out how students reason and to prevent rote learning, questions such as "Why do you think so?", "How?", "How do you reach this result?", "How else can you solve it?" can be directed, 3) the effectiveness of the cartoons in the mathematics teaching can be increased.

1. Giriş

Doğrulama işlemi; fende gözlemle, matematikte ise muhakemeyle yapıldığından matematiğin temeli muhakemedir (Ross, 1998). Matematik eğitiminde genel bir terim olan 'Muhakeme', bireyler tarafından 'Düşünme' ile çok yakın anlamlı hatta düşünmenin eş anlamlısı olarak yorumlanmaktadır (Mata-Pereira ve da Ponte, 2017). Muhakeme, "düşünce dizisi, düşünme yöntemi, iddialar üretme ve sonuca ulaşma" olarak tanımlanmaktadır (Lithner, 2008). Leighton (2003) muhakemeyi, tam veya doğru sonuca ulaşmak için kanıt, bilgi ve düşünceleri birlikte düzenleme süreci olarak ifade etmektedir. Matematiksel muhakeme ise dünyayı matematik penceresinden "Neden" ve "Nasıl" sorgulamalarıyla anlamaya yardımcı olan ve bu anlamlandırma yoluyla doğru sonuçlara ulaşmayı sağlayan kişiye özgü-kültürel, üst düzey bir düşünme süreci olarak tanımlanabilir.

Matematiksel muhakeme, temel bir beceriden fazlasıdır (Ball ve Bass, 2003). İleri düzeylerde de olsa bir düşünce bilgi temeline dayanmıyorsa, gerekçelendirilemiyorsa, mantıklı yaklaşımlar içermiyorsa muhakeme olarak kabul edilemez (Umay, 2003). Muhakemenin yeni fikirler oluşturmadığı ve muhakemenin görevinin, belli bir durum, konu, bilgi ya da olay hakkında en iyi kararı vermek olduğu belirtilmektedir (Toulmin, Rieke ve Janik, 1984). Örneğin, *"şundan dolayı…", "çünkü…", "… sebep olmaktadır"* gibi gerekçelendirmeyi gerektiren ifadelerin kullanılması birer muhakeme göstergesidir. Nitekim Mason (2001) muhakemenin *"Eğer… ise…"* yapısını kullanmayı, varsayımlarda bulunmayı ve sonuç çıkarmayı gerektirdiğini belirtmiştir. Dolayısıyla, bir duruma ilişkin muhakemede bulunabilenler, o durumu tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder; bunu önceki bilgileriyle ilişkilendirir, mantıklı tahminlerde, varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşır, ulaştığı sonuçları açıklayabilir ve savunabilir (Umay, 2003).

Matematiksel Muhakemenin Geliştirilmesi

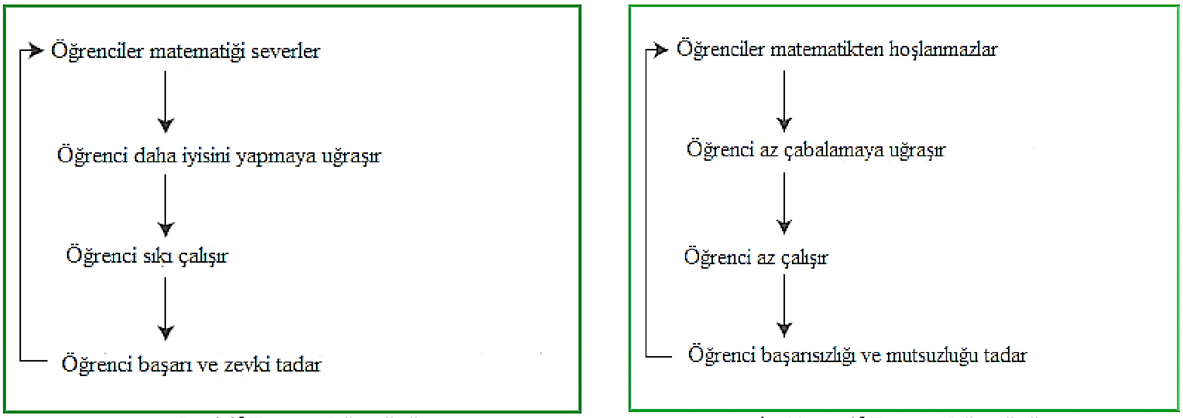
Destekleyici ortamlar sağlandığı takdirde tüm öğrenciler çıkarımlarda bulunabilir, bu çıkarımları çürütebilir ve uygun muhakemede bulunabilirler (Yackel ve Hanna, 2003). Literatürde matematiksel muhakemenin gelişmesini sağlayan birçok durum açıklanmaktadır. Örneğin, Francisco ve Maher (2005), öğrencileri kendi matematiksel aktivitelerine sahiplik etmeleri yönünde cesaretlendirmenin, ilgili problemlerin yer aldığı kompleks uygulamaları kullanmanın, öğrencilerin işbirlikli çalışmalarına imkan tanımanın ve onların fikirlerini gerekçelendirmelerini beklemenin matematiksel muhakemenin gelişmesine yardımcı olduğunu ifade etmektedirler. Umay (2003), bütün öğrencilerin aktif olarak katılabildiği, kendi muhakeme stillerini bildiği öğrenci merkezli öğrenme ortamlarının, matematiksel muhakeme yeteneklerinin geliştirilmesi için uygun zeminler olduğunu belirtmiştir. NCTM (1989) muhakemeyi geliştirmek için grup projeleri şeklinde, teknolojinin kullanıldığı ve öğrencilerin ilgisini çeken problem durumlarını kullanmak ve kompleksliği arttırmayı önermektedir. Öğrencilerin farklı muhakeme türleriyle karşı karşıya getirilmeleri de muhakemenin gelişiminde rol oynayan faktörler arasında sayılmaktadır (NCTM, 2000). Matematiksel muhakemenin; sosyal etkileşimlerle, oyunlarla ve bireyler arasında geçen yapıcı tartışmalarla da geliştiği belirtilmektedir (Schliemann ve Carraher, 2002).

Mevcut araştırma kapsamında, matematiksel muhakemenin gelişmesi için tasarlanan öğrenme ortamında izlenen yolları literatür bağlantılı olarak şu şekilde açıklamak mümkündür: *(1) İşbirlikli Gruplarda Tartışma:* Öğrencilerin birbirleriyle etkileşime geçtikleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabildikleri bir ortam matematiksel muhakemenin gelişimi için ideal ortamdır (Cobb, Yackel ve Wood, 1992; Yankelewitz, Mueller ve Maher, 2010). Vygotsky (1978), bir çocuğun muhakemesinin akranlarıyla yaşadığı, sosyal etkileşime girdiği ortamlarda geliştiğini belirtmektedir. Böyle bir ortamda her bir birey diğerlerinin muhakemesinden etkilenme fırsatı elde etmiş olur (Maher ve Davis, 1995). *(2) Günlük Yaşamla İlişkilendirme:* Kültürel edinimler ve bireyin muhakemesi, matematiği kullanmayı ve matematiksel anlamayı önemli derecede etkiler (Schliemann ve Carraher, 2002). Özellikle matematiğin soyut yapısı göz önüne alındığında, matematiğin gerçek hayatla ilişkilendirilmesi zorunlu hale gelmektedir. Öğrenci gerçek hayatta karşılığını bulabildiği matematiği önemser ve ancak bu şekilde matematiğin soyut temsillerini gerçek hayatla ilişkilendirerek anlamlı hale getirebilir. Öğrencilerin gerçek dünya ile ilişkilendirebilecekleri, zihinde canlandırabilecekleri durumlarla uğraşmalarının sağlanmasının, gerçekle ilişkilendirebilme becerilerini geliştirebileceği vurgulanmaktadır (Inoue, 2008). Matematiksel muhakemenin sıra dışı gerçek problemlerle uğraşarak ve deneyim yaşadıkça geliştiği düşünüldüğünde, matematiğin günlük yaşamla ilişkilendirilmesinin önemi ortaya çıkmaktadır. *(3) Somut Materyaller:* Somut işlemler döneminden soyut işlemler dönemine girilen yıllarda öğrenciler özellikle soyut kavramları öğrenmede zorluk yaşayabilmektedirler. Somut materyal kullanımının bu zorluğun üstesinden gelmede etkili olabileceği ve bu sayede bilginin somuttan soyuta doğru bir transferinin mümkün olabileceği düşünülmektedir. Nitekim öğretim materyali, farklı duyuları harekete geçiren ve somut matematikten soyut matematiğe geçişi sağlayan (Moyer, 2001) araçlar olarak tanımlanmaktadır. Literatür incelendiğinde somut materyallerin; öğrenci merkezli, zengin öğrenme fırsatları sunarak matematik yapmayı ve sevmeyi sağladığı (Raphael ve Wahlstrom, 1989) ortaya konmuştur. (4) *Bilgisayar Destekli Uygulamalar:* Matematik eğitimiyle ilgili yapılan uluslararası reform çalışmalarında (NCTM, 2000), teknolojinin öğretimde kullanılması sayesinde öğrencilerin daha etkili kararlar verdikleri, daha etkili muhakemede bulundukları ve problem çözmeye daha iyi odaklandıkları belirtilmektedir. Pratt (2000) ve Polaki (2002), çalışmalarında bilgisayar destekli uygulamalarla gerçekleştirilen matematik öğretiminin matematik kavramlarının öğretiminde etkili olduğunu ortaya koymuşlardır. Aynı paralelde, McCoy (1996) ve Ragasa (2008), yaptıkları çalışmalarında bilgisayar destekli öğretimin, kavramların öğrenilmesini kolaylaştırdığından bahsetmişlerdir. Kramarski ve Zeichner (2001) teknoloji destekli matematik öğretiminin matematiksel muhakemeyi geliştirdiğini ortaya koymuşlardır. *(5) Eğitsel Oyunlar:* Prensky (2001)'e göre oyunlarda problem çözme olduğundan, oyunlar yaratıcılığı tetikler. Oyun hem çocukların kurallı yaşamalarını öğretir hem de akranlarına oranla günlük davranışlarının üzerinde davranmalarına yardımcı olur (Vygotsky, 1978). Oyunu kazanmak öğrencilerin temel hedefi olduğundan, "*ne yapmalıyız?*", "*böyle daha mantıklı*", "*bu, kazanma ihtimalimizi azaltır*", "*… ise… olur, aksi takdirde… olur*" şeklinde çok yönlü düşünerek zihinsel olarak daha fazla çaba harcamak zorunda kalırlar ki bu da daha fazla hayal gücü ve daha fazla muhakemede bulunmayı gerektirmektedir. Oyunların öğrencileri mantıklı matematiksel düşünme yönünde cesaretlendirdiği (Kamii ve Rummelsburg, 2008) ve matematiksel muhakemeyi geliştirdiği (Olson, 2007) belirtilmektedir. *(6) Karikatürler:* Resimler ve şekiller, örneklerin gözlenmesi, karmaşık işlemlerin sezgisel olarak anlaşılması veya uzamsal ilişkiler kurma gibi zihinsel işlemleri harekete geçirir (Fischbein, 1987). Matematik kavramlarının görselleştirilmesinde dolayısıyla daha somut hale getirilmesinde kullanılan etkili araçlardan biri de *karikatürler*dir. Karikatürlerin, öğrencilerin düşünme becerilerini geliştirdiği ve matematik öğrenmeyi zevkli hale getirdiği yapılan araştırmalar (Nahiley, Stephens ve Sutherland, 1982; Şengül ve Dereli, 2013; Williams ve Kamii, 1986) tarafından ortaya konulmuştur.

Tutum

Matematiğe ve matematik öğrenmeye insanlar çoğu zaman ön yargıyla yaklaşmıştır. Her ne kadar birçok öğrencide matematiğe ilişkin "ben matematiği yapamam" öğrenilmiş çaresizlik duygusu mevcut ise de bütün öğrencilerin içinde matematiği öğrenme isteği vardır. Bu isteği ortaya çıkarmak için öğrencilerin ilgilerini çekecek, merak isteği uyandıracak, işbirliği içerisinde çalışmalarını teşvik edecek ve bilgiyi kendilerinin bulmalarına imkân tanıyacak farklı etkinlik ve uygulamalara yer verilmesi gerekmektedir. Böyle bir ortamda öğrenci sürece isteyerek katılacağı için etkili ve dolayısıyla kalıcı öğrenmelerin gerçekleşeceği söylenebilir. Matematiğin zorluğu, yapısından olduğu kadar ona karşı geliştirilen önyargı ve korkudan da kaynaklanmaktadır. Günlük yaşamdan uzak ve standart yöntemlerle gerçekleştirilen öğretim, matematiğe karşı önyargılı bireyler yetişmesine neden olabilmektedir. Bu önyargıyı ortadan kaldırmak için öğrencilerin matematiğe ilişkin olumlu tutumlara sahip olmalarını sağlamak gerekmektedir.

Matematiğe ilişkin olumsuz yönde geliştirilen tutumlar, bir basamak sonra farklı nedenlerden de etkilenerek davranışlara dönüşmekte ve matematik öğretiminde başarının sağlanmasında engel oluşturmaktadırlar (Uğurel ve Moralı, 2006). Nisbet (2006), matematik öğrenmede tutum-davranış ilişkisini pozitif tutum ve negatif tutum döngüsü olmak üzere iki döngüde açıklamaktadır: Pozitif tutum döngüsünde; matematiğe ilişkin olumlu tutumlara sahip öğrenciler matematiği severler, daha iyisini yapmak için uğraşır, sık çalışırlar, böylece olumlu davranış sergiler ve başarıyı tadarlar. Bu başarı, tutumun daha da iyileşmesini sağlar ve döngü bu şekilde devam eder (Şekil 1a). Negatif tutum döngüsünde ise; matematikten hoşlanmayan öğrenci az çabalamaya uğraşır, az çalışır ve başarısızlığı tadar. Bu ise daha fazla olumsuz tutumun oluşmasına yol açar (Şekil 1b).



a. Pozitif Tutum Döngüsü b. Negatif Tutum Döngüsü

Şekil 1. Pozitif ve negatif tutum döngüleri

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Matematiksel muhakemeyi geliştirmek, matematiği öğrenme ve öğretmenin özünü oluşturmaktadır (Ball ve Bass, 2003). Fischbein ve Schnarch (1997), öğrencilerin muhakeme becerilerinin gelişmesinin matematik konularını öğrenmelerini kolaylaştırdığını belirtmişlerdir. Öğrencinin muhakeme becerisi geliştirilmediği takdirde matematik, anlamlandırılmadan, ezbere öğrenilen bir dizi kurallar yığını halini alır (Ross, 1998). Ortaokul matematik dersi müfredatında (MEB, 2013), muhakeme becerisinin okul ve okul dışı hayatı kolaylaştırmadaki etkisi dikkate alındığında matematik öğretim sürecinde bu becerinin geliştirilmesi için uygun ortamlar hazırlanmasının gerekliliğinden bahsedilmektedir. Aynı müfredatta somut modellerden yararlanılması, bilgi ve iletişim teknolojilerine ve problem çözme etkinliklerine yer verilmesi, öğrencilerin iletişim, ilişkilendirme, muhakeme becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmalar yapılması tavsiye edilmektedir. Daha önce bahsedildiği gibi hem ulusal hem de uluslararası matematik eğitimi reform çalışmalarında hem de birçok araştırmada muhakemenin, matematiği anlama ve yapma sürecindeki rolü göz önüne alındığında, matematiksel muhakeme becerisinin geliştirilmesi önemlidir.

Öte yandan, muhakeme üst düzey bir uğraş gerektirdiğinden toplumda matematiğe karşı bir önyargı oluşmaktadır. Bu önyargı, eğitim ortamlarına da yansımakta ve öğrencilerin matematiği sevmemelerine yol açmaktadır. Bir de okullarda gerçekleştirilen öğretimler geleneksel yaklaşıma dayalı ise matematiğe ilişkin bu ön yargının oluşması kaçınılmaz olmaktadır. Çünkü geleneksel yaklaşımın benimsendiği öğrenme ortamlarında öğretim, tamamen öğretmenin öngörüsüne dayalı olarak yaptığı planlamaya göre gerçekleştirilmektedir. Bu tür bir öğretme yaklaşımı sadece düz anlatıma dayalı olduğundan, bireysel farklılıkları ve bireyin zihinsel yapısını anlamayı arka plana attığından yerini yeni yaklaşımlara bırakmıştır. Bu yeni yaklaşımlar kullanılarak öğrenme ortamlarının tasarlanması, insan zihninin doğal bir özelliği olan eleştirel, mantıklı ve derin düşünmeyi sağlayan ve matematik yapmak için gerekli olan matematiksel muhakeme becerisini geliştirmek açısından bir gerekliliktir. Bu bağlamda, öğrencilerin ilgisini çeken ve eğlence yaratan *eğitsel oyunlar*, dikkat çeken ve teknolojiyi kullanma imkânı sunan *bilgisayar destekli uygulamalar*, görselliğin ve mizahın ön plana çıktığı *karikatürler*, görsellik ve etkinlik havası veren *somut materyaller*, öğrencilere çevrelerini anlamayı ve matematikselleştirmeyi sağlayan *günlük yaşamla ilişkilendirme*, birbirinden öğrenmeyi olanaklı kılan işbirlikli heterojen gruplarda gerçekleşen *yapıcı tartışmalar* ve üst düzey düşünmeyi sağlayan *açık uçlu problemler* sayesinde matematiğin daha etkili öğrenileceği, matematiksel muhakemenin gelişeceği ve kullanılan farklı ve eğlenceli yöntemler sayesinde öğrencilerin matematik tutumlarının iyileşeceği düşünülmektedir. Bu araştırmanın amacı, farklı öğretim yolları kullanılarak tasarlanan bir öğrenme ortamının 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakemesine ve matematiğe ilişkin tutumlarına etkisini belirlemektir.

2. Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada, farklı öğretim yolları kullanılarak tasarlanan öğrenme ortamının bir grubun matematiksel muhakemesine ve matematik tutumuna etkisi incelendiğinden deneysel modellerden tek gruplu öntest-sontest modeli benimsenmiştir. Araştırma, ayrıca 7. sınıf düzeyindeki bir grupla ilgili süreci farklı boyutlarıyla uzun süre incelediğinden bir durum çalışması niteliğindedir.

Katılımcılar

Araştırma, Türkiye'deki bir il merkezinden rastgele seçilen bir devlet ortaokulunda okuyan ve yedinci sınıfta öğrenim gören 27 öğrencinin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Katılımcı olarak yedinci sınıf öğrencilerinin belirlenmesinde, bu sınıf düzeyindeki öğrencilerin ortaokula iyice alışmış olmaları (5 ve 6. sınıflarla karşılaştırıldığında), Temel Eğitimden Liseye Geçiş Sınavı (Türkiye'de 8. Sınıfta liseye geçişte uygulanan merkezi bir sınavıdır) gibi kaygılarının olmaması, tamsayılar konusunun öğretiminin bu sınıf düzeyinde de devam etmesi gibi faktörler göz önüne alınmıştır. Bu sınıfın matematik dersini yürüten matematik öğretmeninin görüşleri alınarak ve geçen dönemin karne notlarına bakılarak bu okuldaki 5 tane yedinci sınıf şubesinden matematik başarısı olarak orta düzeyde olan 7/E şubesi seçilmiştir. Bu sınıftaki öğrencilerin karnedeki matematik dersi not ortalamaları 46 ile 100 arasında değişmektedir. Çalışmaya katılan öğrenciler süreç boyunca dörderli gruplar şeklinde oturtulmuşlardır. Öğrencilerin karne matematik ortalamalarına bakılarak, grupların matematik başarısı açısından heterojen olmalarına özen gösterilmiştir. Bu yolla, öğrenciler arasında oluşacak işbirliği sayesinde tartışarak birbirlerinin öğrenmelerine katkı sağlamaları amaçlanmıştır. Katılımcı öğrencilerin kimliklerini gizli tutmak için kendilerine A Öğrencisi, B Öğrencisi, C Öğrencisi, … şeklinde kodlar verilmiştir.

Verilerin Toplanması

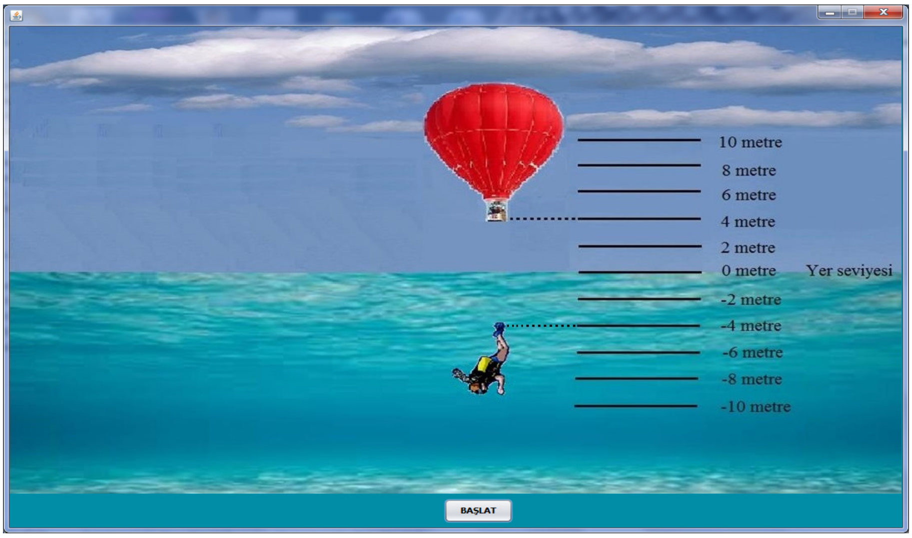
Veri toplama aracı olarak, araştırmacı tarafından geliştirilen ve tamsayılar ve kesirler konularıyla ilgili muhakeme gerektiren problemlerin yer aldığı Matematiksel Muhakeme Testi (MMT) ve Aşkar (1986)'ın geliştirdiği Matematik Tutum Ölçeği (MTÖ) kullanılmıştır. MMT'de bulunan 30 taslak soru, iki alan eğitimcisi, bir eğitim programcısı, bir ölçme değerlendirme uzmanı ve mesleğinde 9, 14, 15 (ikisi) ve 20 yıl deneyime sahip beş ortaokul matematik öğretmeninin görüşlerine sunulmuştur. Alan eğitimcilerinden ve öğretmenlerden ayrıca soruların muhakeme gerektirmesi, sınıf seviyesine uygun olması ve tamsayılar/kesirlerle ilgili olması hususunda da görüş alınmıştır. Yapılan madde toplam korelasyonu analizi sonrasında MMT'de 2. ve 20. problemlerin madde toplam korelasyonları .20'den düşük olduğundan testten çıkarılmıştır. 3, 10, 21 ve 27. problemlerin madde toplam korelasyonları .20 ile .30 arasında olmasına rağmen, öğrencilerin bu soruları zor olarak belirtmelerinden dolayı bu problemlerin testten çıkarılmasına karar verilmiştir. 24 maddeden oluşan nihai test gerçek uygulamada 27 7. sınıf öğrencisine uygulanmış ve testin Cronbach Alfa katsayısı .863 olarak hesaplanmıştır. Öğrencilerin sürecin sonunda matematiğe ilişkin tutumlarının değişip değişmediğini belirlemek için 20 maddeden oluşan MTÖ kullanılmıştır. Ölçekteki maddeler "Kesinlikle Katılmıyorum" 1 puan, "Katılmıyorum" 2 puan, "Fikrim yok" 3 puan, "Katılıyorum" 4 puan ve "Tamamen Katılıyorum" 5 puan olarak puanlanmıştır. Ölçekten alınan puanın yüksek olmasının matematiğe ilişkin olumlu tutumu, düşük olmasının ise olumsuz tutumu göstereceği söylenebilir. Bu ölçekten alınabilecek en düşük puan 20, en yüksek puan ise 100'dür. Ölçeğin bu öğrencilere uygulanabilecek güvenilir bir ölçek olup olmadığını belirlemek için Cronbach Alfa katsayısı hesaplanmıştır. Yapılan analizler sonucunda, MTÖ'ye ilişkin Cronbach Alfa katsayısı .924 olarak belirlenmiştir.

Süreç

Bu çalışmada araştırmacı tarafından her hafta 4 ders saati olmak üzere toplam 8 hafta (32 ders saati) boyunca Ortaokul Matematik Dersi 5, 6, 7 ve 8. sınıflar Öğretim Programı (MEB, 2013)'ndaki tamsayılar ve kesirler konularındaki kazanımların öğretimi daha önce bahsedilen farklı yöntem ve teknikler (*Bilgisayar destekli uygulamalar, Eğitsel oyunlar, Somut öğretim materyalleri, Karikatürler, İşbirlikli gruplarda tartışma, Günlük hayatla ilişkilendirme*) kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Mevcut araştırmada konu olarak tam sayılar ve kesirlerin seçilmesinde, tam sayıların (Fischbein, 1987; Hativa ve Cohen, 1995) ve kesirlerin (Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Moss ve Case, 1999; Stafylidou ve Vosniadou, 2004) öğrencilerin öğrenmede zorluk çektikleri konulardan olduğunun belirtilmesi, Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7, 8. sınıflar) Müfredatı (MEB, 2013)'nın en kapsamlı öğrenme alanı olan "Sayılar ve İşlemler" in alt öğrenme alanları olmaları ve günlük yaşamda birçok alanda tamsayılar ve kesirlere ihtiyaç duyulması etkili olmuştur. Öte yandan, çalışmada iki konu belirlenmesinin nedeni, temel bir beceri olan matematiksel muhakeme becerisinin bir konunun öğretimi boyunca gelişemeyebileceği ve matematiğe ilişkin tutumun kısa sürede değişemeyebileceği endişesidir. İki konunun öğretimi tek konuya göre daha uzun süreceğinden, öğrencilerin matematiksel muhakemelerinin gelişiminin ve tutumlarının değişiminin iki konunun öğretimi boyunca daha iyi tespit edilebileceği düşünülmektedir.

Uygulama sürecinde kullanılan her bir yöntem/teknik kapsamında aşağıda bazı örnekler verilmiştir. Örneğin, *bilgisayar destekli uygulamalar,* "Uçan Balon ve Dalgıç", "Sincabı Çıkışa Ulaştır", "Kesirleri Tanı, Modelle ve Karşılaştır" olarak adlandırılmıştır. Bu uygulamalar ve içerikleri önce araştırmacı tarafından projeksiyon cihazıyla perdeye yansıtılarak öğrencilere anlatılmıştır. Her bir uygulama bir süre anlatıldıktan sonra işbirlikli gruplar halinde organize edilen öğrencilerin de bilgisayar ekranından görmelerine imkan tanınmıştır. Bu uygulamalarla, araştırmacının rehberliğinde, tüm öğrencilerin bu uygulamalarla uğraşarak ve konu ve sorular üzerinde grup arkadaşlarıyla yapıcı tartışmalar yaparak öğrenmeleri sağlanmıştır. Bu uygulamaların; içerikleri hedeflenen kazanımları verecek şekilde hazırlandığı için öğretici; bilgisayar ekranında bir etkinlik olduğu için eğlenceli ve içindeki görsel sorular sayesinde düşündürücü birer etkinlik olduğu söylenebilir.

<u>Uçan Balon ve Dalgıç:</u> Bu uygulama, öğrencilerin "Tam sayıları yorumlar ve sayı doğrusunda gösterir" ve "Bir tam sayının mutlak değerini belirler ve anlamlandırır" kazanımlarını edinmeleri için hazırlanmıştır. Öğrenciler bilgisayarda karşılarına çıkan ekranda "Başlat" butonuna bir kez tıkladıklarında balon 2 metre yukarı çıkarken, aynı anda dalgıç 2 metre dalmaktadır ve bu süreç bu şekilde devam etmektedir. Bu uygulamayla, araştırmacının rehberliği ve grup işbirliğiyle öğrenciler pozitif tamsayı kavramını balonun yer seviyesinden (0 metre) yükseğe çıkmakla ve negatif tamsayı kavramını ise dalgıcın denizin derinliklerine inmesiyle ilişkilendirebileceklerdir. Öğrenciler örneğin (-2) metre ifadesiyle 2 metre derinliğin kastedildiğinin farkına varacaklardır. Ayrıca bu uygulama sayesinde öğrenciler mutlak değer kavramına da anlam yükleyebileceklerdir. Örneğin, öğrenciler aynı anda balon 2 metre yukarı çıktığında ve dalgıç 2 metre daldığında balonun ve dalgıcın yer seviyesine uzaklıklarının eşit olduğunu fark edeceklerdir. Buradan $|-2|=|+2|=2$ eşitliğinin ne anlam ifade ettiğini görebileceklerdir. Öte yandan, sayı doğrusunun mantığına benzeyen bu uygulamayla, öğrenciler sayı doğrusunu ve tamsayıların sayı doğrusundaki dizilişleri, işaretleri hakkında da bilgi sahibi olacaklardır. Bu uygulamadan bir arayüz Resim 1'de verilmiştir.



Resim 1. Uçan Balon ve Dalgıç uygulamasından bir ara yüz

Öğrenme ortamında kullanılan *eğitsel oyunlar*, “Hedefi Vurarak En Yüksek Puanı Al”, “En Büyük Tam Sayıya İsabet Et”, “Dengini Bul” olarak adlandırılmıştır. Bu oyunlarda amaç, öğrencilerin hem hedeflenen kazanımları edinmeleri hem de eğlenerek matematik öğrenmelerini sağlamaktır. Tüm oyunlar dört kişiden oluşan gruplar arasında oynanmıştır. Her bir oyunu kazanan gruba çeşitli ödüller verilerek, motive olmaları sağlanmaya çalışılmıştır. Oyunlara gruptaki tüm öğrencilerin katılmalarına özen gösterilmiştir. Her oyunda her bir grubun skorları tahtaya yazılarak tüm öğrencilerin görmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin tamamen oyuna dalarak, oyunların öğretim boyutundan uzaklaşmalarını engellemek için oyun esnasında “Neden böyle düşündün?”, “Hangi ihtimal daha yüksek? Niçin?”, “Başka nasıl olabilirdi?” gibi yapıcı sorular yöneltilmiştir.

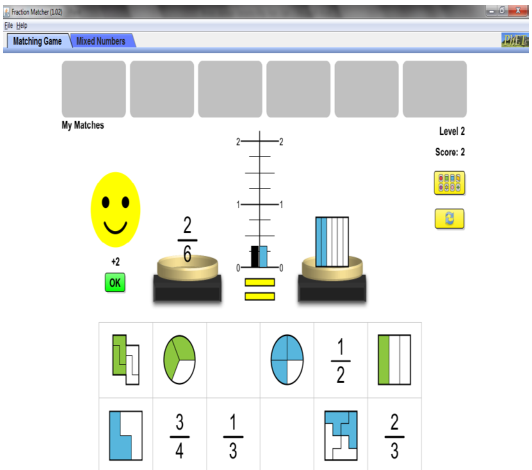
Dengini Bul: Bu oyun, öğrencilerin “Sadeleştirme ve genişletmenin kesrin değerini değiştirmeyeceğini anlar ve bir kesre denk olan kesirler oluşturur” kazanımını edinmeleri için hazırlanmıştır. Bu oyunda, 16 bölmeye $\frac{11}{33}, \frac{11}{44}, \frac{33}{44}, \frac{44}{88}, \frac{22}{55}, \frac{2}{2}, \frac{3}{7}\frac{2}{2}, \frac{3}{7}, \frac{6}{11}\frac{6}{11}, \frac{5}{10}\frac{5}{10}, \frac{11}{11}, \frac{11}{99}, \frac{44}{77}, \frac{88}{44}, \frac{33}{22}, \frac{22}{11}, \frac{11}{22}$ kesir ifadelerinin rastgele yerleştirildiği bir materyal kullanılmıştır. Her bir grubun 1 bölme açma hakkı vardır ve bu 1 açma sonucunda $\frac{11}{22}$ kesrine denk kesri bulan grup oyunu kazanacaktır. Bu oyunla, öğrencilerin kesirlerde denklik, sadeleştirme ve genişletme kavramlarını öğrenmeleri amaçlanmıştır. Bu oyunun kullanıldığı öğrenme ortamından bir kare Resim 2’de verilmiştir.

Resim 2. Dengini Bul oyunundan bir kare

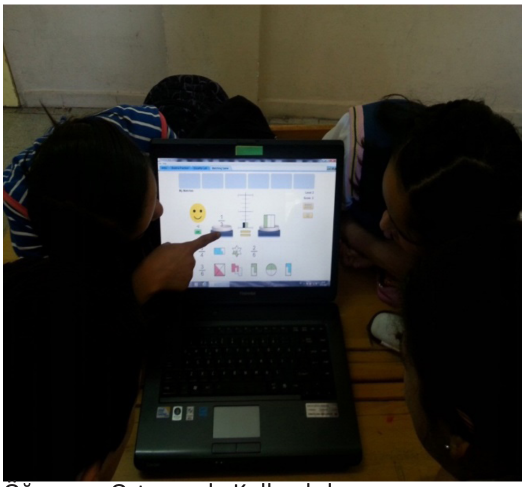
Öğrencilerin tamsayılar ve kesirlerle ilgili kazanımları edinmeleri için farklı *somut materyaller* kullanılarak işbirlikli gruplar arasında oyun şeklinde çeşitli etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Somut materyaller hem dikkat çektiği, hem görsel olduğu hem de öğrenciler tarafından bizzat kullanıldıkları için etkili öğrenmelerin gerçekleşmesini sağladığı söylenebilir. Somut materyaller ve bu materyallerin kullanılarak gerçekleştirildiği oyunlardan bir kare Resim 3 ve Şekil 2'de verilmiştir.

Resim 3. Öğrenme ortamında kullanılan bazı materyaller

Tüm uygulama süreci boyunca, öğrencilerin muhakeme becerilerinin farkına varmak ve geliştirmek için öğrenme ortamında öğrencilere düşüncelerini açıklamalarını sağlayacak "Neden böyle düşünüyorsunuz", "Bu sonuca nasıl ulaştınız", "Niçin?", "Başka nasıl olabilirdi?" gibi sorular sorulmuştur. Ayrıca her hafta kesirler ve tamsayılar konularıyla ilgili ve muhakeme gerektiren üst düzey açık uçlu problemler, işbirlikli gruplarda araştırmacı rehberliğinde tartışılarak çözülmüştür. Örnek açık uçlu problemler, öğrencilerin kendi aralarında gerçekleştirdiği tartışmalarından bazılarının aktarıldığı Bulgular kısmında verilmiştir. Bu problemler sayesinde öğrencilerin cevap seçeneklerine odaklanmak yerine bir çözüm sunmaya çalıştığı, grup arkadaşlarıyla tartıştığı ve böylece daha fazla muhakemede bulundukları söylenebilir.

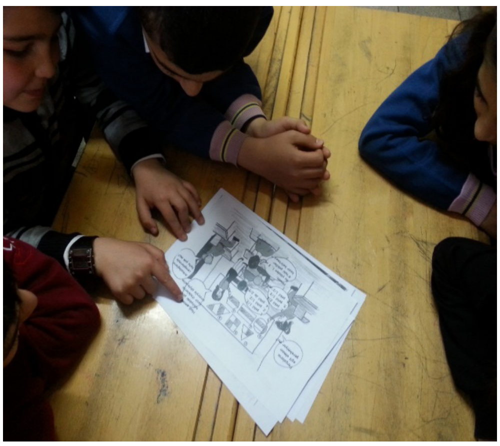


Bilgisayar destekli bir uygulama

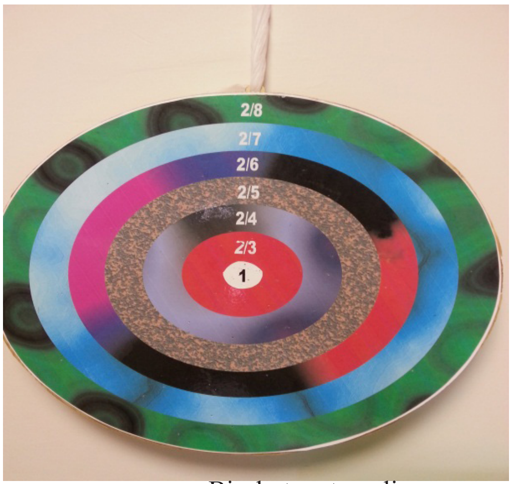


Öğrenme Ortamında Kullanılırken

Bir karikatür



Grupça Karikatür İncelenirken



Bir dart materyali

Dart oyununda kullanılırken

Grupta tartışarak problem çözerken

Sınıftan bir kare

Şekil 2. Zenginleştirilmiş öğrenme ortamından yansımalar

Verilerin Analizi

Araştırmanın verilerini, öğrencilerin Matematiksel Muhakeme Testi (MMT)'ne ve Matematik Tutum Ölçeği (MTÖ)'ne öntestte ve sontestte verdikleri cevaplar oluşturmaktadır. Bu veriler, Statistical Package for Social Sciences (SPSS) programı kullanılarak analiz edilmiştir. Yapılan analizler sonucunda, hem MMT (p=.008) hem de MTÖ'ye (p=.000) ait verilerin normal dağılım göstermemesi nedeniyle her ikisinde de öntest-sontest karşılaştırmalarında parametrik olmayan *Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi* kullanılmıştır. MMT'deki sorulara verilen cevapların analizinde, Erdem (2011) tarafından geliştirilen Tablo 1'deki puanlama ölçeği kullanılmıştır. MMT'nin puanlanmasına katılan deneyimli iki matematik eğitimcisi öncelikle sorulara verilen cevapları ön test ve son test için ayrı ayrı puanlamışlardır. Her iki uygulamada puanlamalar arasındaki tutarlılığı belirlemek için ayrı ayrı Pearson Korelasyon Katsayısı (r) hesaplanmıştır. İki uzmanın birbirinden bağımsız bir şekilde yaptığı puanlamalar arasındaki tutarlılık öntestte %95 (*p=.000, r=.952*), sontestte ise %92 (*p=.000, r=.918*) olarak belirlenmiştir. Soruları daha güvenilir bir şekilde puanlamak, başka bir deyişle öğrencinin matematiksel muhakemesi hakkında daha doğru değerlendirmeler yapmak için çözümleri anlaşılmayan ya da herhangi bir çıkarıma ulaşılamayan durumlarda ilgili öğrenciyle görüşülerek çözümlerine ilişkin bilgi sahibi olunmuştur. Tablo 1'de yer alan ölçütlere göre verilen puanlar kullanılarak öğrencilerin matematiksel muhakeme gelişim düzeylerinin istatistiksel karşılaştırmaları yapılmıştır. Bu amaçla, her bir öğrencinin öntest ve sontestte MMT'den aldığı puan ortalaması hesaplanmıştır.

Tablo 1. MMT'deki Soruları Puanlama Ölçeği (Erdem, 2011)

Düzey	Puan	Açıklama
Tam Doğru	5	Tamamen doğru kabul edilen ifadeler
Kısmen Doğru-A	4	Tam doğru cevaba göre eksik ifadeler
Kısmen Doğru-B	3	Doğru nedene bağlanarak yapılan kısmen doğru ifadeler
Kısmen Doğru-C	2	Yanlış nedene bağlanarak ya da herhangi bir nedene bağlanmadan yapılan kısmen de olsa doğru kabul edilebilecek ifadeler
Yanlış	1	Tamamıyla yanlış ya da soru ile tam ilişkisi olmayan ifadeler
Yanıtsız	0	Boş bırakılmış veya sorunun aynısının cevap olarak yazıldığı ifadeler

Öğrencilerin MMT'ye ilişkin puan ortalamaları, Tablo 2'de verilen matematiksel muhakeme düzeylerine göre değerlendirilmiştir. Öğrencilerin MMT'ye ilişkin ön test ve sontestteki puan ortalamaları hesaplanarak, öntestte ve sontestte hangi matematiksel muhakeme düzeyinde oldukları belirlenmiştir. Her öğrencinin MMT'den aldığı toplam puan, MMT'deki soru sayısına (24) bölünerek öğrencinin puan ortalaması/düzeyi hesaplanmıştır. Örneğin Tablo 1'deki puanlama ölçeğine göre MMT'den toplam 66 puan alan bir öğrencinin [66/24=2.75 puanı 2.00-2.99 aralığındadır] (Bakınız Tablo 2) matematiksel muhakemesi orta düzey olarak değerlendirilmiştir. Bunların yanı sıra, MMT'de yer alan sorularda, ön test ve son test bakımından ortaya çıkan değişimi daha detaylı ortaya koymak amacıyla bazı öğrenci cevapları doğrudan aktarılarak yorumlanmıştır.

Tablo 2. Matematiksel Muhakeme Düzeyleri

Düzey	Puan Ortalaması ($\bar{x}$)
Oldukça Düşük	0.00-0.99
Düşük	1.00-1.99
Orta	2.00-2.99
Yüksek	3.00-3.99
Oldukça Yüksek	4.00-5.00

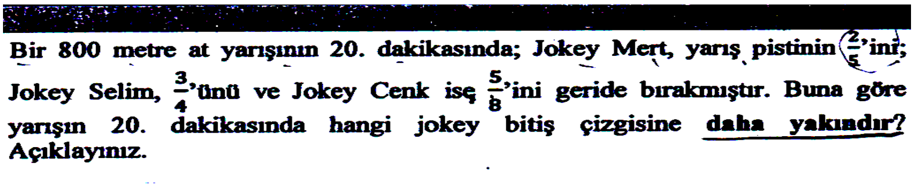
3. Bulgular

Bu bölümde, öğrencilerin MMT ve MTÖ'ye ilişkin ön test ve son test sonuçlarına yer verilmiştir. Ayrıca tüm öğrencilerin MMT'deki sorulara verdikleri cevapları çalışmaya yansıtmak mümkün olmadığından, öntest ve sontestte MMT'deki sorulara verilen bazı öğrenci cevapları aktarılmıştır.

Tablo 3. MMT'ye İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

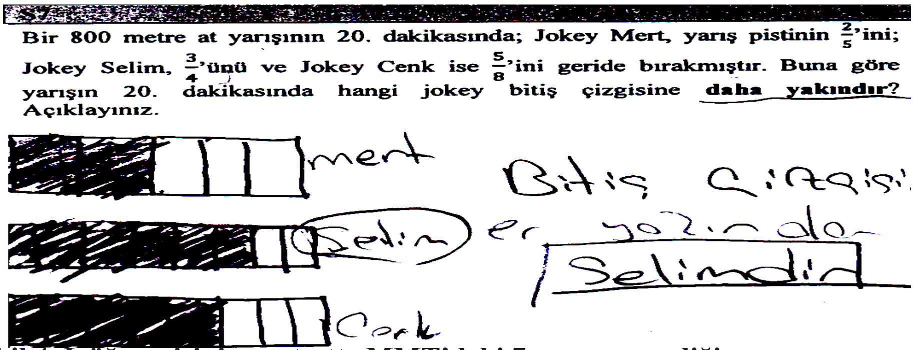
Sontest-Öntest	n	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	z	p
Negatif Sıra	0	.00	.00	4.54	.00
Pozitif Sıra	27	14.00	378.00		
Eşit	0	-	-		

Tablo 3'te görüldüğü gibi, öğrencilerin MMT'den aldıkları ön test ve sontest puanları arasında anlamlı bir fark olduğu bulunmuştur ($z=4.54$, $p<.05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplamları dikkate alındığında, gözlenen farkın pozitif sıralar, yani sontest puanı lehine olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, öğrencilerin MMT'ye ilişkin sontest puanlarının öntest puanlarına göre anlamlı düzeyde daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. MMT'de yer alan soruların muhakeme gerektirdiği göz önüne alındığında, bu öğrenme ortamının öğrencilerin matematiksel muhakemelerini anlamlı düzeyde geliştirdiği söylenebilir. Öte yandan, tüm cevap kağıtları incelendiğinde, her öğrencide farklı düzeyde de olsa şaşırtıcı bir şekilde tüm öğrencilerin sontest puan ortalamalarının öntest puan ortalamalarından daha yüksek olduğu görülmüştür. MMT'deki sorulara öntestte ve sontestte verilen cevaplar incelenip karşılaştırıldığında da, öğrencilerin sontest performanslarının öntest performanslarından daha iyi olduğu görülmüştür. Aşağıda bazı öğrencilerin MMT'deki sorulara verdikleri bazı cevaplar doğrudan aktarılmış ve aynı öğrencilerin öntestte ve sontestte verdikleri cevaplar birbiriyle karşılaştırılarak yorumlanmıştır.



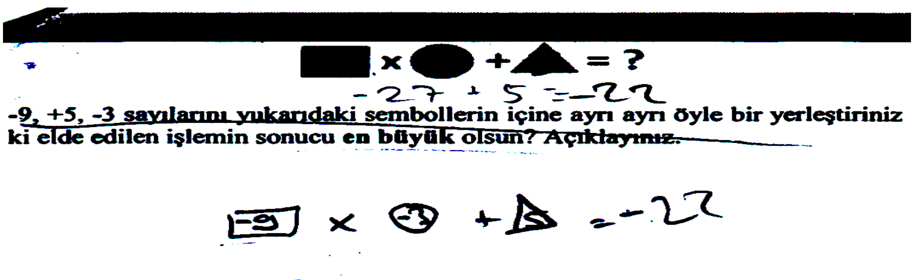
Şekil 3. L öğrencisinin öntestte MMT'deki 7. soruya verdiği cevap

MMT'deki 7. soruda öğrencilerin şu şekilde muhakemede bulunmaları gerekmektedir: Öncelikle her bir Jokeyin aldığı yollar ya da yarışı bitirmeleri için kalan yollar karşılaştırılacaktır. Bunun için, her bir Jokeyin aldığı yolun tüm yola oranını gösteren $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$ (Jokey Mert), $\frac{33}{44}$ (Jokey Selim) ve $\frac{55}{88}$ (Jokey Cenk) kesirli ifadelerinin karşılaştırılması gerekmektedir. Tek başına karşılaştırma yapmayı düşünebilmek de matematiksel muhakemenin bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Bu karşılaştırma işlemi, paydalar eşitlenerek, modelle gösterilerek ya da farklı yollardan yapılabilmektedir. Şekil 3'te bu soruya L öğrencisinin ön testte verdiği cevap incelendiğinde, bu öğrenci herhangi bir çözüm sunmamıştır. Kendisiyle bu soruya ilişkin yapılan ilk görüşmede, L öğrencisi "*Bu soruyu şekille yapmayı düşündüm ama…*" ifadesini kullanmıştır. Yaptığı açıklamadan hareketle, öğrencinin öntestte bu soruya ilişkin muhakemesinin iyi olmadığı söylenebilir. Matematik öğretmeniyle yapılan görüşmelerde, öğretmen bu öğrencinin matematik başarısının iyi düzeyde olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrencinin bir önceki dönemde matematik dersi karne notunun 96 olduğu belirlenmiştir. L öğrencisinin ön test puan ortalaması 0.92 olarak hesaplanmıştır. Bu ortalama *"oldukça düşük"* düzey aralığına (0.00-0.99) düşmektedir.



Şekil 4. L öğrencisinin sontestte MMT'deki 7. soruya verdiği cevap

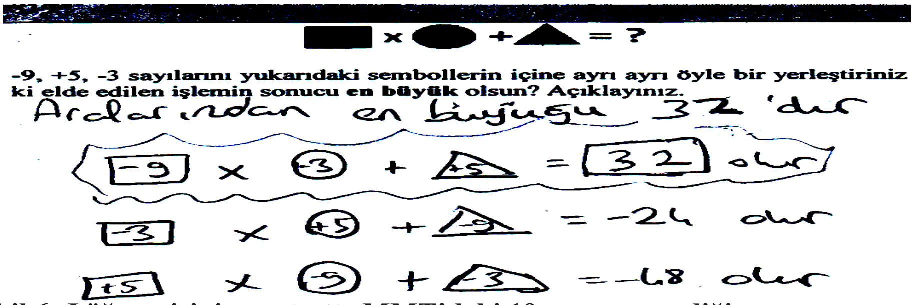
Şekil 4'te bu soruya L öğrencisinin son testte verdiği cevap incelendiğinde, bu öğrenci beklenen muhakemeyi karşılaştırma yoluna başvurarak sergilemiştir. Öğrenci, aynı büyüklükteki ve aynı türdeki bir geometrik şekil kullanarak her bir Jokeyin aldığı yolları modelle göstermiştir. Jokey Mert için şekli 5 eş parçaya bölüp 2 parçasını, Jokey Selim için şekli 8 eş parçaya bölüp 6 parçasını ve Jokey Cenk için şekli 8 eş parçaya bölüp 5 parçasını taramıştır. Bu gösterimle, bitiş çizgisine en yakın Jokeyin Selim olduğu sonucuna varmıştır. Öğrencinin çözümünden hareketle, sontestte bu soruya ilişkin muhakemesinin çok daha iyi olduğu söylenebilir. Bu durum MMT'den aldığı puan ortalaması tarafından da doğrulanmaktadır. Nitekim L öğrencisinin son test puan ortalaması 2.21 olarak hesaplanmıştır. Bu ortalama *"orta"* düzey aralığına (2.00-2.99) düşmektedir. Bu değerlendirmeler ışığında, yapılan müdahalenin bir sonucu olarak L öğrencisinin matematiksel muhakemesinin oldukça iyileştiği söylenebilir.



Şekil 5. J öğrencisinin öntestte MMT'deki 19. soruya verdiği cevap

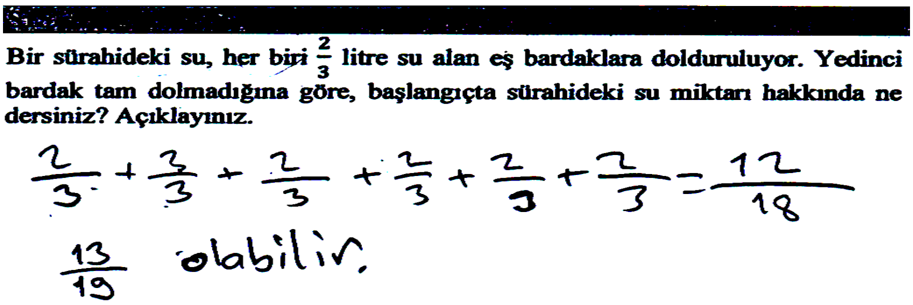
MMT'deki 10. soruda öğrencilerin şu şekilde muhakemede bulunmaları gerekmektedir: -9, +5, -3 sayıları kullanılarak yapılacak işlemler sonucunda en büyük sayının elde edilmesi için çarpma işlemindeki çarpanların -9 ve -3 olmalıdır.

Başka bir deyişle, dikdörtgen ve daire şekillerinin -9 ve -3 ve üçgen şeklinin ise +5 olması gerekmektedir. Bu işlem; (-9) . (-3) + (+5)= +32 olarak sonuçlandırılır. Şekil 5'te görüldüğü gibi öğrenci, beklenen muhakemeyi sergileyememiştir. J öğrencisi, dikdörtgensel bölgeye -9, dairesel bölgeye -3 ve üçgensel bölgeye +5 sayısını yerleştirmiş ve işlem yaparak -22 sonucuna şekilde ulaşmıştır. Öğrenci, çarpma işleminin sonucunu -27 olarak hesaplamış ki bu sayıyla +5 sayısını toplayarak -22 sonucuna ulaşmıştır. Matematik öğretmeniyle yapılan görüşmelerde, öğretmen bu öğrencinin matematik başarısının düşük düzeyde olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrencinin bir önceki dönemde matematik dersi karne notunun 71 olduğu belirlenmiştir. J öğrencisinin ön test puan ortalaması 2.21 olarak hesaplanmıştır. Bu ortalama *"orta"* düzey aralığına (2.00-2.99) düşmektedir.



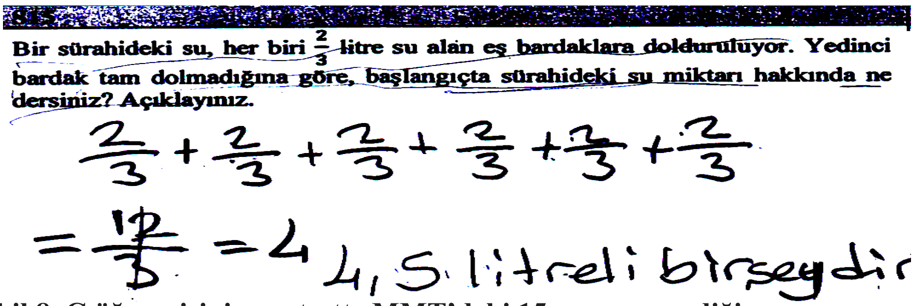
Şekil 6. J öğrencisinin sontestte MMT'deki 19. soruya verdiği cevap

Şekil 6'da bu soruya J öğrencisinin son testte verdiği cevap incelendiğinde, bu öğrenci beklenen muhakemeyi karşılaştırma yaparak daha iyi sergilemiştir. Öğrenci, -9, -3 ve +5 sayılarını dikdörtgensel, dairesel ve üçgensel bölgelere farklı kombinasyonlarla yerleştirmiş ve her yerleştirmede işlemin sonuçlarını doğru bulmuş ve karşılaştırmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda, en büyük sonuca karar vererek, cevap olarak belirtmiştir. Öğrencinin çözümünden hareketle, sontestte bu soruya ilişkin muhakemesinin daha iyi olduğu söylenebilir. Bu durum MMT'den aldığı puan ortalaması tarafından da doğrulanmaktadır. Nitekim, J öğrencisinin son test puan ortalaması 3.25 olarak hesaplanmıştır. Bu ortalama *"yüksek"* düzey aralığına (3.00-3.99) düşmektedir. Bu ortalamalar ve değerlendirmeler ışığında, yapılan müdahalenin bir sonucu olarak J öğrencisinin matematiksel muhakemesinin iyileştiği söylenebilir.



Şekil 7. G öğrencisinin öntestte MMT'deki 15. soruya verdiği cevap

MMT'deki 15. soruda öğrencilerin şu şekilde muhakemede bulunmaları gerekmektedir: Altıncı bardak tam dolduğu için sürahide kesinlikle 6. $\frac{22}{33}$ =4 litre vardır. Yedinci bardak tam dolmadığına göre, başlangıçta sürahide 4 litreden fazla su bulunmaktadır. Şekil 7'de bu soruya G öğrencisinin ön testte verdiği cevap incelendiğinde, bu öğrenci $\frac{22}{33}$ ifadesini altı kez toplamayı düşünebilmiş ancak kavram yanılgılı bir toplama işlemi yapmıştır. Öğrenci, paylardaki sayıları toplayarak toplamın payı; paydadaki sayıları toplayıp toplamın paydası olarak yazmıştır. G öğrencisi, altı bardağın toplamını $\frac{1212}{1818}$ olarak bulduktan sonra yedinci bardak eklendiğinde $\frac{1212}{1818}$ den fazla olacağını düşünerek, bu ifadeden büyük bir ifade yazmaya çalışmış ve $\frac{1313}{1919}$'u yazmıştır. Öğrenci, büyük bir ifade yazmak için doğal sayılardaki büyüklük-küçüklük kavramının mantığını kesirli ifadelere aynen aktarmış ve pay ve paydayı birer sayı artırarak $\frac{1313}{1919}$ yazmıştır. Yapılan bu çözümden hareketle, öğrencinin beklenen muhakemeyi gerçekleştiremediği söylenebilir. Matematik öğretmeniyle yapılan görüşmelerde, öğretmen bu öğrencinin matematik başarısının orta düzeyde olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrencinin bir önceki dönemde matematik dersi karne notunun 77 olduğu belirlenmiştir. G öğrencisinin ön test puan ortalaması 1.78 olarak hesaplanmıştır. Bu ortalama *"düşük"* düzey aralığına (1.00-1.99) düşmektedir.


Bir sürahideki su, her biri $\frac{2}{3}$ litre su alan eş bardaklara dolduruluyor. Yedinci bardak tam dolmadığına göre, başlangıçta sürahideki su miktarı hakkında ne dersiniz? Açıklayınız.

$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$

$=\frac{12}{3}=4$ 4,5 litreli birşeydir

Şekil 8. G öğrencisinin sontestte MMT'deki 15. soruya verdiği cevap

Şekil 8'de bu soruya G öğrencisinin son testte verdiği cevap incelendiğinde, bu öğrenci beklenen muhakemeyi sergilemiştir. Öğrenci, öntestte verdiği cevaptaki hataya düşmemiş ve $\frac{22}{33}$ ifadesini doğru bir şekilde toplayarak sonucu 4 olarak bulmuştur. Öğrenci, yedinci bardağın tam dolmadığını düşünerek sürahideki suyun *"4,5 litreli bir şey"* olacağını düşünmüştür. Öğrencinin çözümünden hareketle, sontestte bu soruya ilişkin muhakemesinin iyi olduğu söylenebilir. Bu durum MMT'den aldığı puan ortalaması tarafından da doğrulanmaktadır. Nitekim G öğrencisinin son test puan ortalaması 3.51 olarak hesaplanmıştır. Bu ortalama *"yüksek"* düzey aralığına (3.00-3.99) düşmektedir. Bu değerlendirmeler ışığında, yapılan müdahalenin bir sonucu olarak G öğrencisinin matematiksel muhakemesinin çok daha iyileştiği söylenebilir.

Öğrencilerin kendi grup arkadaşlarıyla yaptıkları işbirlikli tartışmalar sayesinde de matematiksel muhakemelerinin iyileştiği söylenebilir. Bu işbirlikli tartışmalarda, düşük performanslı öğrencilerin öğrenme sürecinde grup arkadaşlarından oldukça istifade ettikleri belirlenmiştir. Bu bağlamda, aşağıda uygulama süreci boyunca öğrencilere yöneltilen açık uçlu problemlere ilişkin bazı gruplarda geçen yapıcı tartışmalara yer verilmiştir.

Problem-1: *Hasan, başlangıç sıcaklığı bilinmeyen bir maddenin soğutucuya konulduktan sonra, her 2 saat sonunda 3 ^oC soğuduğunu fark etmiştir. Maddenin 4 saat sonraki sıcaklığı -8 ^oC olduğuna göre, Hasan'ın soğutucuya bıraktığı bu maddenin başlangıç sıcaklığı kaç ^oC dir? Açıklayınız.*

Aşağıda Problem-1'e ilişkin bir grupta işbirliği içerisinde gerçekleştirilen bir yapıcı tartışmaya yer verilmiştir.

F öğrencisi: *4 saat sonra -8 derece oluyor…*

M öğrencisi: *2 saatte 3 derece soğuyorsa… (düşünüyor)*

C öğrencisi: *Tamam işte, 4 saatte ise 6 derece soğur.*

M öğrencisi: *Ya da saatte 1,5 derece soğur. Toplamda 4*1,5=6 derece soğur.*

I öğrencisi: *-8 den 6'yı çıkar. Yani -8-6= -14 olur.*

F öğrencisi: *6'yı mı?*

C öğrencisi: *Hayıııır, -8 den -6 yı çıkarmamız gerekiyor. -8-(-6)=-2*

I öğrencisi: *Tamam da niye -6?*

C öğrencisi: *Çünkü soğumak kavramı (-) ile belirtilir.*

I öğrencisi: *Anlamadım.*

M öğrencisi: *Bence C arkadaşımız haklı, başlangıç sıcaklığı -14 olursa… Hayır olmaz, çünkü gittikçe soğur ve -8 den daha soğuk olur, bu da olmaz.*

C öğrencisi: *Senin anlamadığın -8 ile -14 arasındaki farktır. -8 sıcaklığı -14 e göre daha sıcaktır.*

I öğrencisi: *Hmmm. Tamam tamam, ben…*

M öğrencisi: *O halde cevap -2 dir.*

C öğrencisi: *Evet.*

Dialogdan da anlaşılacağı üzere, matematiksel muhakemesi iyi düzeyde olan C öğrencisi (*öntest ortalaması: 4.00, son test ortalaması: 4.67*) gruba liderlik yapmaktadır. C öğrencisi problemi sadece kendisi çözmeyip, arkadaşlarının yanlışlarına da yerinde müdahalede bulunmaktadır. Probleme ilişkin kısmen çözümü olan M öğrencisi (*öntest ortalaması: 2.13, son test ortalaması: 3.17)* zaman zaman karışıklıklar yaşamış ancak C ile birlikte doğru sonuca ulaşmıştır. I öğrencisi (*öntest ortalaması: 1.00, son test ortalaması: 2.33)* ise problemi çözmek için yanlış işlemler yaparak başlamış ancak gruptaki diğer arkadaşlarının yardımıyla yanlışının farkına varmıştır. F öğrencisi (*öntest ortalaması: 1.93, son test ortalaması: 3.18)*, ilk başta sürece dahil olmuş, belli bir süre sonra susmayı tercih etmiş ancak karıştırdığı noktada birşeyler ifade etmiştir. Öğrencilerin grup içindeki bu yapıcı tartışmalarına bakıldığında, özellikle I öğrencisinin sürecin başında problemi çözme performansının düşük olduğu, karışıklık yaşadığı noktaların olduğu ve I öğrencisiyle birlikte gruptaki diğer öğrencilerin C öğrencisinden faydalanarak doğru çözüme ulaştıkları anlaşılmaktadır. Bu çıkarım, C öğrencisinin matematiksel muhakemesinin oldukça yüksek düzeyde olduğunu desteklemektedir. Bu durum, farklı matematik performansına sahip öğrencileri işbirlikli gruplar şeklinde organize etmenin matematiksel muhakemeyi geliştirme üzerindeki etkisini ortaya koymaktadır.

Problem-4: *Osman, sitenin bahçesinde 7 adım ileri gidip 3 adım geriye giderek yürüyüş yapmaktadır. Aynı sitede oturan ve bir adım mesafesi Osman'ınkiyle aynı olan Veli ise 6 adım ileri gidip 2 adım geriye giderek yürüyüş yapmaktadır. Aynı noktadan aynı yöne doğru yürüyüşe başlayan Osman ve Veli, ayrı ayrı toplamda 125 adım attıklarında aralarındaki mesafe kaç adım olur? Açıklayınız.*

Aşağıda Problem-4'e ilişkin bir grupta işbirliği içerisinde gerçekleştirilen yapıcı tartışmalara yer verilmiştir.

Ç öğrencisi: *Biraz karışık.*

İ öğrencisi: *Osman, 7 adım ileri gidiyormuş ve 3 adım geri geliyormuş…* (düşünüyor). *O zaman toplamda 4 adım ilerliyor.*

O öğrencisi: *Hayır toplamda 10 adım atıyor, ama başladığı yerden 4 adım uzaklaşıyor.*

İ öğrencisi: *Evet 4.*

Hepsi düşünüyor.

İ öğrencisi: *Veli de 4 adım gidiyormuş.*

Ş öğrencisi: *6 adım ileri 2 adım geri, bu da aynı.*

O öğrencisi: *O da 4 adım uzaklaşıyor. Ama toplamda 8 adım attığında.*

Soruyu çözmek için düşünüyorlar.

O öğrencisi: *Osman toplamda 10 adım ve Veli toplamda 8 adım… Osman daha fazla adım atıyor.*

İ öğrencisi: *7 adım ileri… 3 adım geri… (düşünüyor)*

Ş öğrencisi: *İkisi de aynı miktarda uzaklaştıkları için aralarındaki mesafe sıfır olmaz mı?*

İ öğrencisi: *Ama biri 10 adımda 4, diğeri 8 adımda 4 adım ilerliyor, aynı değil.*

Soru grup üyeleri tarafından defalarca okunuyor.

O öğrencisi: *Osman daha çok adım atıyor…*

Ç öğrencisi: *Ama aynı ilerliyorlar… (kafası karışık bir şekilde)*

İ öğrencisi: *Arkadaşlar, Osman 10 adımda 4 adım ilerliyorsa 125 adımda kaç adım ilerler?*

O öğrencisi: *Orantı kurarsak… ama 125 10'un tam katı değil…*

İ öğrencisi: *Ama… (düşünüyor)*

Sessizlik.

İ öğrencisi: *10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130 ama 130 adım yok. 125 var.*

O öğrencisi: *Tamam işte İ. 120 adım atar önce. Ne olur o zaman? … 10 adımda 4 ise 120 adımda 48 adım ilerler.*

Ş öğrencisi: *Evet.*

Ç öğrencisi: *Peki kalan 5 adım?*

Sessizlik (Herkes düşünüyor)

İ öğrencisi: *7 adımdan sonra ancak geri geliyor. 5 adım daha atar değil mi?*

O öğrencisi: *Evet, 5 adımda 7 adıma varmadığı için geri gelmez. Yani, Osman 48+5=53 adım toplamda ilerler.*

İ öğrencisi: *Evet, 53 adım.*

Ş öğrencisi: *Hmmm.*

Ç öğrencisi: *Çok zor bulduk sonucu.*

Ş öğrencisi: *Veli'ninki?*

O öğrencisi: *Aynı işte… (Konuşuyordu…)*

İ öğrencisi: *Evet, ben söyleyeyim. 8 adımda 4 adım uzaklaştığı için 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120 ama 128 adım yok.*

O öğrencisi: *120 adım atar önce… 8 adımda 4 ise 120 adımda 60 adım ilerler.*

İ öğrencisi: *5 adım daha atacak.*

Ş öğrencisi: *Geri gelmeyecek mi?*

O öğrencisi: *Hayıııır. Geri gelmesi için en az 6 adım atması gerekiyor.*

İ öğrencisi: *O, haklı. Daha 6 adıma varmadığı için sadece öne doğru ilerler. Bu yüzden toplamda Veli, 60+5=65 adım uzaklaşır.*

Ş öğrencisi: *Tamam tamam, anladım.*

Ç öğrencisi: *Aralarındaki mesafe… 65-53=12 adım. Tamam işte bulduk.*

Hep bir ağızdan: *Evet.*

Bu dialoğa bakıldığında, matematiksel muhakemesi iyi düzeyde olan İ öğrencisi (*öntest ortalaması: 3.71, son test ortalaması: 4.75*) ve matematiksel muhakemesi orta düzeyde olan O öğrencisi (*öntest ortalaması: 2.21, son test ortalaması: 3.55*) gruba liderlik yapmaktadır. Öğrenciler Osman ve Veli'nin ileri ve sonra geri adım atmalarını nasıl yorumlayacakları hususunda zorluk yaşamışlardır. Öğrenciler işbirliğiyle Osman ve Veli'nin 10 adım ve 8 adımda ne kadar uzaklaştıklarını bulabilmişlerdir. Ancak 125 adımı problemin çözümünde nasıl değerlendireceklerini muhakeme edememişlerdir. İ öğrencisi ve O öğrencisinin problemi adım adım düşünmeleri sonucunda 125'e yakın olan 120 sayısının hem 10 hem de 8'in katı olduğunu fark etmişlerdir. Bu düşünme esnasında, grubun diğer üyeleri çoğunlukla susmayı tercih etmişlerdir. Problem aydınlığa kavuşmaya başlayınca, Ş öğrencisi (*öntest ortalaması: 1.25, son test ortalaması: 2.75*) ve Ç öğrencisi (*öntest ortalaması: 1.25, son test ortalaması: 2.88*) zaman zaman sürece katkı sağlamışlardır. Örneğin, Ç öğrencisi "*Peki kalan 5 adım?"* şeklinde bir ifade kullanarak bu 5 adımın problemin çözümünde önemli olduğunu fark etmiştir. Grup üyeleri işbirliği içerisinde çalışarak, problemi zor da olsa çözmüşlerdir.

Yukarıda aktarılan grup tartışmalarından da anlaşılacağı gibi, öğrencilerin kendi aralarında yaptıkları işbirlikli tartışmaların hem grupta dayanışma sağladığı hem de grup üyelerinin birbirlerinden faydalanmalarını sağladığı söylenebilir. Bu tartışmalarda genellikle matematiksel muhakemesi iyi düzeyde olan öğrencilerin gruba liderlik yaptıkları ve arkadaşlarının zorluk çektikleri, anlamadıkları noktalarda kendilerine yardımcı oldukları görülmüştür. Bu işbirliğinden sadece düşük matematik performansına sahip öğrenciler yararlanmamış, matematik performansı yüksek olan öğrencilerin de diğer arkadaşlarından zaman zaman gerekli noktalarda faydalandıkları gözlenmiştir. Özetle, bu öğrenme ortamında farklı matematik performansına sahip öğrencilerden gruplar oluşturularak gerçekleştirilen öğretim sayesinde, öğrencilerin işbirliği içerisinde yapıcı tartışmalar yapmalarını sağlayarak birbirlerinin eksiklerini giderdikleri ve sürecin sonuna doğru daha iyi muhakemede bulundukları söylenebilir.

Tablo 4. MTÖ'ye İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Sontest-Öntest	n	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	z	p
Negatif Sıra	0	.00	.00	4.54	.00
Pozitif Sıra	27	14.00	378.00		
Eşit	0	-	-		

Tablo 4'ten de görüldüğü gibi, öğrencilerin MTÖ'ye ilişkin öntest ve sontest puanları arasında anlamlı bir fark olduğu ortaya çıkmıştır (z=4.54, p<.05). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplamları dikkate alındığında, gözlenen farkın pozitif sıralar yani sontest puanı lehinde olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, öğrencilerin MTÖ'ye ilişkin sontest puanlarının öntest puanlarına göre anlamlı düzeyde daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuçtan hareketle, bu öğrenme ortamının öğrencilerin matematiğe ilişkin tutumlarını anlamlı düzeyde iyileştirdiği söylenebilir.

4. Tartışma ve Sonuç

Araştırmanın sonuçları, farklı öğretim yolları (*Bilgisayar destekli uygulamalar, Eğitsel oyunlar, Somut öğretim materyalleri, Karikatürler, İşbirlikli gruplarda tartışma, Günlük hayatla ilişkilendirme*) birlikte kullanılarak tasarlanan öğrenme ortamının 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakemelerini anlamlı düzeyde geliştirdiğini göstermiştir. Ortaya çıkan bu sonuç, benzer sınıf ortamlarının matematiksel muhakemeyi geliştirdiğini belirten araştırmaları desteklemektedir. Örneğin, kompleks problemlere yer vermenin ve öğrencilerin işbirlikli çalışmalarına imkan tanımanın (Francisco ve Maher, 2005; NCTM, 1989), öğrencilerin aktif olarak katılabildiği ve kendi muhakeme stillerini bildiği öğrenci merkezli ortamların (Umay, 2003), öğrencileri yazılı ya da sözlü olarak düşündüklerini açıklamaları yönünde cesaretlendirmenin (Swan, 2011), teknolojinin kullanıldığı ve öğrencilerin ilgisini çeken problem durumlarına yer vermenin (Kramarski ve Zeichner, 2001; NCTM, 1989), sosyal etkileşimlerin, oyunların ve bireyler arasında geçen yapıcı tartışmaların (Schliemann ve Carraher, 2002; Vygotsky, 1978), öğrencilerin birbirleriyle etkileşime geçtikleri, matematiksel fikirlerini rahatlıkla paylaşabildikleri ortamların (Cobb vd., 1992; Yankelewitz vd., 2010) matematiksel muhakemenin gelişmesine katkı sağladığı belirtilmiştir. Öte yandan, uluslararası reform çalışmalarında (NCTM, 1989; 2000) öğrencilerin hatalarını matematiksel muhakemelerini arttıracak şekilde analiz etmeye yönelik öğretim yaklaşımlarının işe koşulması önerilmektedir. Ayrıca diğer bazı araştırmalarda (Hartman, 2001; Kramarski ve Zoldan, 2008) tercih edilen öğretim yaklaşımlarının öğrencilerin bireysel açıklama, sorgulama, derin düşünme, kritik düşünme ve muhakeme becerilerini geliştirmeleri gerektiği önerilmiştir.

Birçok öğrenci cevabının karşılaştırmalı olarak değerlendirilmesi sonucunda, tasarlanan öğrenme ortamında gerçekleştirilen öğretimin öğrencilerin matematiksel muhakemelerinin gelişmesini sağladığı söylenebilir. Ancak bireysel farklılıklardan kaynaklı doğal olarak bu süreçten her öğrencinin aynı düzeyde etkilendiği söylenemez. Örneğin, B öğrencisinin MMT'deki puan ortalaması öntestte 2.88 iken, son testte 3.50'e yükselmiştir. C öğrencisinin MMT'deki puan ortalaması öntestte 4.00 iken, son testte 4.67'e, L öğrencisinin MMT'deki puan ortalaması öntestte 0.92 iken, son testte 2.21'e ve P öğrencisinin MMT'deki puan ortalaması öntestte 1.50 iken, son testte 3.13'e yükselmiştir. Bu rakamlara bakıldığında, süreç sonrasında B öğrencisinin matematiksel muhakemesinin %22 oranında geliştiği, C öğrencisi için bu gelişmenin %17, L öğrencisi için %140 ve P öğrencisi için ise %108 olduğu tespit edilmiştir. L ve P gibi bariz bir şekilde daha fazla gelişme gösteren öğrencilerde böyle bir farkın oluşmasında, bu öğrencilerin matematiksel muhakemelerinin süreç öncesinde diğer öğrencilere göre çok daha düşük olmasının etkili olduğu söylenebilir. Başka bir deyişle, gelişim farkı fazla olan öğrencilerde yapılan müdahalenin etkisi daha iyi görülmektedir. Bu sonuç, süreç öncesi ile süreç sonrası arasında gelişim farkı az olan öğrencilerin daha az faydalandığı anlamına gelmemektedir.

Araştırmanın diğer bir ana sonucu olarak, tasarlanan öğrenme ortamının 7. sınıf öğrencilerinin matematiğe ilişkin tutumlarını anlamlı düzeyde iyileştirdiği belirlenmiştir. Bu sonuç, farklı öğretim araçları kullanılarak gerçekleştirilen öğretimin matematiğe ilişkin tutumu olumlu yönde etkilediğini belirten çalışmalarla (Clements, 2000; Gürbüz, Erdem ve Uluat, 2014; McNeil ve Jarvin, 2007; Nahiley vd., 1982; Thompson, 1992) paralellik göstermektedir. Elde edilen bu sonuç, (Şengül ve Dereli, 2013)'nin çalışmasını da desteklemektedir. Şengül ve Dereli (2013)'nin çalışmalarında; matematiğe karşı duyulan olumsuz tutumu, korkuyu ya da ön yargıyı ortadan kaldırmak için öğrencilerin dikkatini çeken, görsel materyallerle bilginin hatırda kalmasını kolaylaştırarak daha fazla duyu organına hitap edebilen, neden sonuç ilişkilerini sorgulama fırsatı veren, bilişsel alana hitap ettiği gibi duyuşsal alana da hitap ederek öğrencilerin derse karşı olumlu tutum geliştirmesini hedefleyen öğrenme ortamlarının ve etkinliklerinin düzenlenmesi son derece önemli olduğu belirtilmektedir. Benzer şekilde, küçük yaşlarda günlük yaşamdan seçilen etkinlik ve uygulamalarla soyut-somut ilişkisinin kavratılmasının matematiğe karşı duyulan korkunun ve olumsuz tutumun azaltılmasında büyük önem taşıdığı ifade edilmektedir (Umay, 2003).

Öğrenci cevaplarından ulaşılan bir diğer sonuç ise, araştırmanın amaçlarından olmasa da, matematik öğretmeninin öğrencilerin matematik başarısıyla ilgili görüşlerinin (düşük, orta, yüksek) ve matematik dersi karne notunun her zaman matematiksel muhakemeyle paralellik göstermediğidir. Başka bir deyişle, matematik dersi karne notu yüksek olan ve matematik öğretmeninin başarılı dediği bir öğrencinin matematiksel muhakeme performansının her zaman yüksek olmadığı ve zaman zaman düşük hatta oldukça düşük olduğu belirlenmiştir. Örneğin, L öğrencisi için sınıfın matematik öğretmeni matematik başarısının "iyi" düzeyde olduğunu ifade etmiş ve öğrencinin matematik dersi karne notu ise 96'dır. Öğretmenin görüşleri ve karne notundan hareketle, L öğrencisinin matematiksel muhakemesinin de paralel olarak yüksek olması beklenir. Ancak L öğrencisinin öntest puan ortalaması 0.92 ve son test puan ortalaması ise 2.21 olarak tespit edilmiştir. Bu ortalamalara göre, L öğrencisinin öntestte oldukça düşük düzeyde, sontestte ise orta düzeyde matematiksel muhakemeye sahip olduğu söylenebilir. Başka bir örnekte, N öğrencisi için matematik öğretmeni matematik başarısının "orta" düzeyde olduğunu ifade etmiş ve öğrencinin matematik dersi karne notu ise 84'tür. Öğretmenin görüşleri ve karne notundan hareketle, N öğrencisinin matematiksel muhakemesinin de orta düzeyde olması beklenen bir durumdur. Ancak N öğrencisinin öntest puan ortalaması 3.54 ve son test puan ortalaması ise 4.29 olarak tespit edilmiştir. Bu ortalamalara göre, N öğrencisinin öntestte yüksek düzeyde ve sontestte oldukça yüksek düzeyde matematiksel muhakemeye sahip olduğu söylenebilir. Öte yandan, matematik öğretmeninin görüşlerine göre iyi düzeyde olan ve matematik dersi karne notu da yüksek olan öğrencilerin matematiksel muhakeme performanslarının da yüksek olduğu tespit edilmiştir. Örneğin, C öğrencisi için matematik öğretmeni matematik başarısının "iyi" düzeyde olduğunu ifade etmiş ve öğrencinin matematik dersi karne notu ise 100'dür. Öğretmenin görüşleri ve karne notundan hareketle, C öğrencisinin matematiksel muhakemesinin de iyi düzeyde olması beklenir ki zaten bu öğrencinin öntest puan ortalaması 4.00 ve son test puan ortalaması ise 4.67 olarak tespit edilmiştir. Bu ortalamalara göre, C öğrencisinin hem öntestte hem de sontestte oldukça yüksek düzeyde matematiksel muhakemeye sahip olduğu söylenebilir.

Bunların yanı sıra araştırma sürecinde, açık uçlu problemler sayesinde öğrencilerin cevap seçeneklerine odaklanmak yerine bir çözüm sunmaya çalıştığı, çözümünü açıkladığı, arkadaşlarıyla birlikte farklı çözüm yolları aradıkları ve bu sayede daha fazla matematiksel muhakemede bulundukları gözlenmiştir. Matematiksel muhakeme becerisini değerlendirmede ve ortaya çıkarmada açık uçlu problemlerin ağırlıklı olarak kullanılması gerektiği Erdem (2011), Erdem ve Gürbüz (2015), Frederiksen (1984), Henningsen ve Stein (1997) tarafından yapılan çalışmalarda da belirtilmiştir. Öğrenciler problemlerle uğraşırken amaç, onların doğru sonuca ulaşmalarının yanında bu sonuca giderken kullandıkları muhakemelerini ortaya çıkarmak ve geliştirmek olmalıdır. Öğretim sürecinde öğrencilere sunulan açık uçlu problemler işbirlikli gruplarda araştırmacı rehberliğinde tartışılarak çözülürken, öğrencilerin muhakemelerini ortaya çıkarmak için "Niçin böyle düşünüyorsunuz?", "Nasıl?", "Bu sonuca nasıl ulaştınız?", "Başka nasıl çözebilirdiniz?" gibi sorular yöneltilmiştir. Bu tür soruların öğrencilerin düşündüklerini açıklamalarına imkân tanıdığı ve matematik dilini kullanarak kendilerini ifade etmelerine katkı sağladığı söylenebilir.

5. Öneriler

Elde edilen sonuçlardan hareketle aşağıdaki önerileri sunmak mümkündür:

- Öğrenme ortamlarında öğrencilerin nasıl muhakemede bulunduklarını ortaya çıkarmak ve muhakemelerini geliştirmek için çözümüne hemen ulaşılamayan dolayısıyla muhakeme gerektiren açık uçlu problemlerin kullanılması oldukça önemlidir.
- Matematiksel muhakemenin geliştirilmesinde ayrıca 1) öğrencileri açıklama yapmaya ve çözümlerini gerekçelendirmeye teşvik etmenin, 2) doğru sonuca kendilerinin ulaşmalarına olanak sağlamanın, 3) öğrencilerin yanlışlarından hareketle doğruya kendilerinin ulaşmalarına imkân tanımanın, 4) grupça problem çözmenin ve problem çözerken farklı çözüm stratejileri kullanmaya teşvik etmenin de etkili olduğu söylenebilir.
- Öğrencilerin matematiğe ilişkin tutumlarını iyileştirmek açısından diğer yöntemlerin yanı sıra özellikle karikatürlerin matematik öğretimindeki etkinliği arttırılmalıdır.

6. Kaynakça

Aşkar, P. (1986). Matematik dersine yönelik tutumu ölçen likert tipi bir ölçeğin geliştirilmesi. *Eğitim ve Bilim*, *11*(62), 31-36.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick,W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: NCTM.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 92–126). New York: Academic Press.

Clements, D. H. (2000). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *1*(1), 45-60.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 99 -122.

Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

Erdem, E. & Gürbüz, R. (2015). An analysis of seventh-grade students' mathematical reasoning. *Çukurova University Faculty of Education Journal*, *45*(1), 123-142.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal of Research in Science Teaching*, *28*(1), 96-105.

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 361–372.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, *54*, 363-407.

Gürbüz, R., Erdem, E. & Uluat, B (2014). Reflections from the process of game-based teaching of probability. *Croatian Journal of Education, 16(Sp. Ed. 3),* 109-131.

Hartman, H. J. (2001). Developing students' meta-cognitive knowledge and skills. In H. J. Hartman (Ed.), *Metacognition in learning and instruction* (pp. 33–68). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Hativa, N. & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics, 28*(2), 401-431.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Inoue, N. (2008). Minimalism as a guiding principle: Linking mathematical learning to everyday knowledge. *Mathemmatical Thinking and Learning*, *10*(1), 36-67.

Kamii, C. & Rummelsburg, J. (2008). Arithmetic for first graders lacking number concepts. *Teaching Children Mathematics, 14*(7), 389–394.

Kramarski, B. & Zeichner, O. (2001). Using technology to enhance mathematical reasoning: Effects of feedback and self-regulation learning. *Educational Media International*, *38*(2-3), 77-82.

Kramarski, B. & Zoldan, S. (2008). Using errors as springboards for enhancing mathematical reasoning with three metacognitive approaches. *The Journal of Educational Research*, *102*(2), 137-151.

Leighton, J. P. (2003). Defining and describing reasoning. In J. P. Leighton and R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning*. New York, NY: Cambridge.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255-276.

McNeil, N. M. & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory into Practice*, *46*(4), 309-316.

Maher, C. A. & Davis, R. B. (1995). Children's explorations leading to proof. In C. Hoyles and L. Healy (Eds.), *Justifying and proving in school mathematics* (pp. 87-105). Mathematical Sciences Group, Institute of Education, University of London, London.

Mason, J. (2001). *Questions about mathematical reasoning and proof in schools*. Opening address to QCA Conference, UK.

Mata-Pereira, J. & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 169-186.

MEB (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. T.C. Milli Eğitim Bakanlığı. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122 – 147.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47,* 175-197.

Nahiley, J., Stephens, J., & Sutherland, J. (1982). Cartoons: When they are effective. *Journal of Extansion*. *3-4*, 531-540.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: Virginia.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA.

Nisbet, S. (2006). *Mathematics without attitude*. Keynote address to the Annual Conference of the Queensland Association of Mathematics Teachers, Brisbane.

Olson, J. (2007). Developing students' mathematical reasoning through games. *Teaching Children Mathematics*, *13*(9), 464-471.

Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(4), 285-313.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 602-625.

Prensky, M. (2001). Fun, play and games: what makes games engaging. In M. Prensky (Ed.), *Digital game-based learning.* New York: McGraw-Hill

Ragasa, C. Y. (2008). A comparison of computer-assisted instruction and the traditional method of teaching basic statistics. *Journal of Statistics Education*, *16*(1), 1-10.

Raphael, D. & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20,* 173–190.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *105*(3), 252-255.

Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, *22*(2), 242-266.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14,* 503-518.

Swan, M. (2011). Improving reasoning: analysing alternative approaches. Retrieved from http://nrich.maths.org/7812/index

Şengül, S. & Dereli, M. (2013). Karikatürle öğretimin 7. sınıf öğrencilerinin tam sayılar konusundaki başarılarına ve kalıcılık düzeylerine etkisi. *The Journal of Academic Social Science Studies, 6*(7), 973-1003.

Thompson, P. W. (1992). Notations, conventions and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 23(*2), 123-147.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (Second Edition). New York: Macmillan Publishing Co.

Uğurel, I. & Moralı, S. (2006). Karikatürler ve matematik öğretiminde kullanımı. *Milli Eğitim Dergisi, 170*, 32-47.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24,* 234-243.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Williams, C. K. & Kamii, C. (1986). How do children learn by handling objects? *Young Children, 42*(1), 23–46.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yankelewitz, D., Mueller, M., & Maher, C. A. (2010). A task that elicits reasoning: A dual analysis. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*, 76-85.