Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(ÖZEL SAYI-I), 56-62
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(SPECIAL ISSUE-I), 56-62
DOI: 10.18185/erzifbed.602225

Yaklaşık Kosimplektik Manifoldlar Üzerinde $\eta -$ Ricci Solitonlar

Mustafa Yıldırım[1*]

[1*] Department of Mathematics, University of Aksaray, Aksaray, Turkey

Geliş / Received: 06/08/2019, Kabul / Accepted: 21/02/2020

Öz

Bu çalışmanın amacı yaklaşık kosimplektik manifoldlar üzerinde $\eta -$Ricci solitonlar ele alınarak bazı eğrilik koşulları altında bu tür manifoldların yapısını incelemektir.

Anahtar Kelimeler: Yaklaşık kosimplektik manifoldlar, $\eta -$Ricci solitonlar, Ricci yarı-simetrik manifoldlar, Einstein yarı-simetrik manifoldlar.

$\eta -$ Ricci Solitons On Nearly Cosymplectic Manifolds

Abstract

The object of the present paper is to examine $\eta -$Ricci solitons on nearly cosymplectic manifolds and investigate curvature conditions for which $\eta -$Ricci solitons in nearly cosymplectic manifolds.

Keywords: Nearly cosymplectic manifolds, $\eta -$Ricci solitons, Ricci-semisymmetric manifolds, Einstein-semmisymetric manifolds

1. Giriş

Son yıllarda birçok araştırmacı diferansiyel geometrinin önemli konularından biri olan değme manifoldları çalışmaktadır. Bu konu diferansiyel geometrik yapıların sentezinde kullanılmaktadır ve modern matematikte değme manifoldların geometrisi artan bir ilgiye sahiptir. Değme manifoldlarda hemen hemen değme manifoldların birçok sınıfı vardır ve bunlardan önemli bir tanesi de (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısına sahip, $(\nabla_X \phi) X = 0$ şartını sağlayan yaklaşık kosimplektik manifoldlardır. Blair (1972), Blair vd. (1974) yaklaşık kosimplektik yapıların önemli özelliklerini ortaya koymuşlar ve yaklaşık kosimplektik yapıları Hermityan manifoldlardaki yaklaşık Kähler yapılarla paralel düşünmüşlerdir. Son zamanlarda bu konu birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. (Endo, 2005; De Nicola vd., 2018; Yıldırım ve Ayar, 2020, Ayar ve Yıldırım., 2019).

*Sorumlu Yazar:mustafayldrm24@gmail.com

Ricci solitonlar, Einstein metriğinin bir genelleştirilmesi olarak ilk defa Hamilton tarafından literatüre kazandırılmıştır (Hamilton, 1982). Daha sonra değme geometride Ricci solitonlar üzerine çalışmalar 1983 yılında Sharma ve Sinha'nın " On para-A-Einstein Manifolds" adlı çalışılmaya başlanmış ve Perelman'ın Poincare varsayımı üzerine çalışmalarında Ricci solitonları kullanmaya başlamasıyla giderek önem kazanmıştır (Sharma vd, 1983; Perelman, 2010). Daha sonra Ricci solitonlar birçok araştırmacı tarafından değme metrik manifoldlarda incelenmiştir (Tripathi, 2008; Blaga, 2015; Bejan ve Crasmareanu, 2011; Ayar ve Yıldırım, 2019)

(M,g) üzerinde S, Ricci tensörü; $£$, Lie türevi; g, Riemann metriği; V düzgün bir vektör alanı ve λ bir sabit olmak üzere g metriği

$$£_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \tag{1}$$

koşulunu sağlıyorsa (g,V,λ) üçlüsüne M üzerinde bir Ricci soliton adı verilir. Burada sabitin negatif, sıfır ve pozitif olması durumunda soliton sırasıyla daralan, değişmeyen ve genişleyen isimlerini alır (Hamilton, 1986).

$\eta -$Ricci solitonlar, Ricci solitonların genelleştirilmişi olarak Cho ve Kimura tarafından tanımlanmıştır (Cho ve Kimura., 2009). Bu notasyon aynı zamanda kompleks formdaki Hopf hiperyüzeylerinde çalışılmıştır (Calin ve Crasmareanu, 2009). M üzerinde V düzgün bir vektör alanı, S Ricci tensörü, λ ve μ sabitler olmak üzere g Riemann metriği,

$$£_V g + 2S(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) + 2\mu\eta(X)\eta(Y) = 0 \tag{2}$$

koşulunu sağlıyorsa (g,V,λ,μ) dörtlüsüne M manifold üzerinde bir $\eta -$Ricci soliton denir (Cho ve Kimura, 2009). Burada X ve Y, M üzerinde herhangi vektör alanlarını temsil eder. Bu bağlamda Blaga'nın (Blaga, 2015) para-Kenmotsu manifoldlar üzerinde $\eta -$Ricci solitonlar ve Ayar vd. (Ayar vd., 2020) yaklaşık Kenmotsu manifoldlarda $\eta -$ Ricci solitonlar çalışmaları örnek gösterilebilir. Özellikle (2) eşitliğinde $\mu = 0$ olması durumunda (g,V,λ,μ) dörtlü $\eta -$ Ricci solitonu (g,V,λ) üçlü Ricci solitona indirgenir.

Bu çalışmada yaklaşık kosimplektik manifoldlar üzerinde $\eta -$ Ricci solitonlar incelenmiştir. Çalışmanın 2. Bölümü olan Materyal ve Metod kısmında yaklaşık kosimplektik manifoldlarla ilgili ön bilgiler ve bu tür manifoldlar üzerinde çalışılıcak eğrilik koşullarıyla ilgili tanımlar verilmiştir. 3.kısım olan Bulgular kısmında ise yaklaşık kosimplektik manifoldlar üzerinde $\eta -$ Ricci solitonların varlığı incelenmiş ve bu tür manifoldlarda $\eta -$Ricci soliton olması durumunda $\lambda + \mu = \frac{1}{2}tr(h^2)$ eşitliğinin sağlanması gerektiği elde edilmiştir. Burada h, $(1,1)-$tipli tensör alanıdır. Aynı zamanda (g,ξ,λ,μ) $\eta -$Ricci solitonuna sahip yaklaşık kosimplektik manifoldlar Ricci yarı-simetrik ve Einstein yarı-simetrik ve $S.R = 0$ koşulları çalışılmıştır.

2. Materyal ve Metod

(ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısıyla donatılmış M^n $(n = 2m+1)$ bir yaklaşık kosimplektik manifold olsun. ϕ bir $(1,1)-$tipli tensör alanı, η bir $1-$form, ξ bir vektör alanı ve g de bir Riemann metriği olmak üzere M üzerinde herhangi X,Y,Z vektör alanları için aşağıdaki denklemler sağlanır (Blair, 1972; Endo, 2005; De Nicola vd., 2018) :

$$\phi\xi=0, \quad \eta(\phi X)=0, \quad \eta(\xi)=1, \tag{3}$$

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi, \qquad \eta(X)=g(X,\xi), \tag{4}$$

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y), \tag{5}$$

$$\nabla_X \xi=hX, \tag{6}$$

$$g((\nabla_X\phi)Y,hZ)=\eta(Y)g(h^2X,\phi Z)-\eta(X)g(h^2Y,\phi Z), \tag{7}$$

$$(\nabla_X h)Y=g(h^2X,Y)\xi-\eta(Y)h^2X, \tag{8}$$

$$tr(h^2)=sabit \tag{9}$$

$$R(Y,Z)\xi=\eta(Y)h^2Z-\eta(Z)h^2Y, \tag{10}$$

$$R(\xi,X)Y=\eta(Y)h^2X-g(h^2Y,X)\xi, \tag{11}$$

$$S(\xi,Z)=-\eta(Z)tr(h^2), \tag{12}$$

$$S(\phi Y,\phi Z)=S(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)tr(h^2), \tag{13}$$

burada h $(1,1)-$tipli tensör alanı ters-simetriktir ve ϕ ile antikomütativdir. Ayrıca ∇, g 'ye göre kovaryant türev operatörüdür.

(M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifold olsun. Eğer herhangi $\lambda : M\to R$ fonksiyonu için Ricci tensörü

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y) \tag{14}$$

koşulunu sağlarsa manifold Einstein manifold olarak isimlendirilir (Perelman, 2002). M bir yaklaşık kosimplektik manifold olsun. Eğer herhangi $X,Y\in\chi(M)$ için

$$S(X,Y)=ag(X,Y)+b\eta(X)\eta(Y) \tag{15}$$

koşulu sağlanırsa M 'ye bir $\eta-$Einstein manifold denir. Burada $a,b : M\to \mathrm{R}$ bir fonksiyondur. Eğer M $n-$boyutlu manifold $\eta-$Einstein yaklaşık kosimplektik manifold ise $\eta-$Einstein olma koşulu, yaklaşık kosimplektik manifoldlar için aşağıdaki gibi ifade edilir (Aktan ve Tekin, 2017).

$$S(X,Y)=\left\{\frac{r+tr(h^2)}{n-1}\right\}g(X,Y)+\left\{\frac{-n\,tr(h^2)-r}{n-1}\right\}\eta(X)\eta(Y).$$

Elde edilecek sonuçlar için aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 2.1. (M^n,g) yaklaşık kosimplektik manifoldu $R.S=0$ koşulunu sağlıyor ise Ricci yarı-simetriktir.

Tanım 2.2. (M^n,g) yaklaşık kosimplektik manifoldu $R.E=0$ koşulunu sağlıyor ise Einstein yarı-simetriktir. Einstein tensörü, S Ricci tensörü, r skaler eğrilik olmak üzere

$$E(X,Y)=S(X,Y)-\frac{r}{n}g(X,Y), \tag{16}$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 2.1. (De Nicola vd., 2018) (M,ϕ,ξ,η,g) bir yaklaşık kosimplektik manifold olsun. $h=0$ olması için gerek ve yeter koşul M manifoldunun $\mathbb{R}\times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometrik olmasıdır. Burada N bir yaklaşık Kähler manifolddur.

3. Bulgular

Yaklaşık Kosimplektik Manifoldlar Üzerinde $\eta-$ Ricci Solitonlar

Teorem 3.1. Eğer bir yaklaşık kosimplektik manifold $\eta-$Ricci soliton koşulunu sağlıyor ise $\lambda+\mu=\frac{1}{2}tr(h^2)$.

İspat. (M^n,ϕ,ξ,η,g) bir $(n=2m+1)-$ boyutlu yaklaşık kosimplektik manifold ve (g,ξ,λ,μ), (M^n,g) üzerinde bir $\eta-$Ricci soliton olsun. O halde aşağıdaki (2) denklemi gerçeklenir:

$$\pounds_V g+2S(X,Y)+2\lambda g(X,Y)+2\mu\eta(X)\eta(Y)=0.$$

$V=\xi$ alarak (7) denkleminden

$$2S(X,Y)=-£_{\xi}g(X,Y)-2\lambda g(X,Y)-2\mu\eta(X)\eta(Y)$$

$$\begin{aligned}2S(X,Y) &= -g(\nabla_X\xi,Y)-g(X,\nabla_Y\xi)\\ &\quad -2\lambda g(X,Y)-2\mu\eta(X)\eta(Y)\\ &= -g(hX,Y)-g(X,hY)\\ &\quad -2\lambda g(X,Y)-2\mu\eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

elde edilir. h ters-simetrik olduğundan dolayı

$$S(X,Y)=-\lambda g(X,Y)-\mu\eta(X)\eta(Y) \qquad (17)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $Y=\xi$ alınırsa

$$S(X,\xi)=-2(\lambda+\mu)\eta(X)$$

elde edilir ve

$$S(X,\xi)=-tr(h^2)\eta(X)$$

(12) denkleminden;

$$(\lambda+\mu)=\frac{1}{2}tr(h^2)$$

bulunur. Sonuç olarak (M^n,g) üzerinde bir $\eta-$Ricci soliton tanımlı ise $(\lambda+\mu)=\frac{1}{2}tr(h^2)$ koşulu sağlanır.

Teorem 3.2. (M^n,g) Ricci yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifold ve (M^n,g) üzerinde (g,ξ,λ,μ) bir $\eta-$Ricci soliton olsun. Bu durumda (M^n,g) ya Einstein manifoldudur ya da $\mathbb{R}\times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

İspat. Bir Ricci yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifoldu düşünelim. Daha sonra Tanım 2.1. den M^n üzerinde herhangi $X,Y,Z\in TM$ için

$$S(R(\xi,X)Y,Z)+S(Y,R(\xi,X)Z)=0 \qquad (18)$$

dir.

(M^n,g) Bir Ricci yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifoldu üzerinde (g,ξ,λ,μ) bir $\eta-$Ricci soliton ise (17) denklemi sağlanır. (17) eşitliği (18) de kullanılırsa

$$\mu g(h^2Y,X)=0$$

elde edilir. Burada elde edilen denklemden $\mu=0$ veya $g(h^2Y,X)=0$ dır. Eğer $\mu=0$ ise (17) denkleminde yerine yazıldığında manifoldun Einstein olduğu görülür. Öte yandan eğer $g(h^2Y,X)=0$ ise $tr(h^2)=0$ yani $h=0$ olduğu aşikardır dolayısıyla Önerme 2.1'den manifold $\mathbb{R}\times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir. Burada N bir yaklaşık Kähler manifolddur.

Teorem 3.3. (M^n,g) bir Einstein yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifoldu $S.R=0$ koşulunu sağlıyor ve (M^n,g) üzerinde (g,ξ,λ,μ) bir $\eta-$Ricci soliton ise manifold $\eta-$Einstein veya $\mathbb{R}\times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

İspat.

$$(X\wedge_S Y)=S(Y,Z)X-S(X,Z)Y$$

şeklinde tanımlı $X\wedge_S Y$ endomorfizmi kullanılarak

$$\begin{aligned}&\left(S(\xi,X).R\right)(Y,Z)W\\ &=(\xi\wedge_S X).R(Y,Z)W\\ &=(\xi\wedge_S X)R(Y,Z)W\\ &\quad +R((\xi\wedge_S X)Y,Z)W\\ &\quad +R(Y,(\xi\wedge_S X)Z)W\\ &\quad +R(Y,Z)(\xi\wedge_S X)W\end{aligned} \qquad (19)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
&(S(\xi,X).R)(Y,Z)W \\
&= S(X,R(Y,Z)W)\xi - S(\xi,R(Y,Z)W)X \\
&\ +S(X,Y)R(\xi,Z)W - S(\xi,Y)R(X,Z)W \\
&\ +S(X,Z)R(Y,\xi)W - S(\xi,Z)R(Y,X)W \\
&\ +S(X,W)R(Y,Z)\xi - S(\xi,W)R(Y,Z)X \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin ξ vektör alanı ile iç çarpımı yapılarak

$$\begin{aligned}
&S(X,R(Y,Z)W) - S(\xi,R(Y,Z)W)\eta(X) \\
&\ +S(X,Y)R(\xi,Z,W,\xi) - S(\xi,Y)R(X,Z,W,\xi) \\
&\ +S(X,Z)R(Y,\xi,W,\xi) - S(\xi,Z)R(Y,X,W,\xi) \\
&\ +S(X,W)R(Y,Z,\xi,\xi) - S(\xi,W)R(Y,Z,X,\xi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. S yerine (17) deki eşitliği yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&-\lambda g(X,R(Y,Z)W) - \mu\eta(X)\eta(R(Y,Z)W \\
&+\lambda g(\xi,R(Y,Z)W)\eta(X) + \mu\eta(\xi)\eta(R(Y,Z)W)\eta(X) \\
&-\lambda g(X,Y)R(\xi,Z,W,\xi) - \mu\eta(X)\eta(Y)R(\xi,Z,W,\xi) \\
&+\lambda g(\xi,Y)R(X,Z,W,\xi) + \mu\eta(\xi)\eta(Y)R(X,Z,W,\xi) \\
&-\lambda g(X,Z)R(Y,\xi,W,\xi) - \mu\eta(X)\eta(Z)R(Y,\xi,W,\xi) \\
&+\lambda g(\xi,Z)R(Y,X,W,\xi) + \mu\eta(\xi)\eta(Z)R(Y,X,W,\xi) \\
&-\lambda g(X,W)R(Y,Z,\xi,\xi) - \mu\eta(X)\eta(W)R(Y,Z,\xi,\xi) \\
&+\lambda g(\xi,W)R(Y,Z,X,\xi) + \mu\eta(\xi)\eta(W)R(Y,Z,X,\xi) \\
&= 0 \qquad (20)
\end{aligned}$$

elde edilir. (20) ifadesinde $W=\xi$ $\quad Y=\xi$ alınır ve (3), (4) ve (11) denklemleri kullanılırsa

$$(-3\lambda+\mu)g(h^2Z,X)=0$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklemden $\mu=3\lambda$ veya $-tr(h^2)=0$. $\mu=3\lambda$ ise manifold $\eta-$ Einstein manifolddur. Ya da $-tr(h^2)=0$ ise $h=0$ dolayısıyla Önerme2.1'den manifold $\mathbb{R}\times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir. Burada N bir yaklaşık Kähler manifolddur.

Theorem 3.4. (M^n,g) Einstein yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifold ve (M^n,g) üzerinde (g,ξ,λ,μ) bir $\eta-$Ricci soliton olsun. Bu durumda (M^n,g) ya Einstein manifoldudur ya da $\mathbb{R}\times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir.

Proof. (M^n,g) bir Einstein yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifold olsun.

Tanım 2.2'den

$$E(R(\xi,X)Y,Z)+E(Y,R(\xi,X)Z=0 \qquad (21)$$

olduğunu biliniyor. (16) eşitliği (21) denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned}
&S(R(\xi,X)Y,Z)+S(Y,R(\xi,X)Z) \\
&-\frac{r}{n}[g(R(\xi,X)Y,Z)+g(Y,R(\xi,X)Z)=0
\end{aligned}$$

elde edilir. (M^n,g) bir Einstein yarı-simetrik yaklaşık kosimplektik manifold üzerinde (g,ξ,λ,μ) bir $\eta-$ Ricci soliton olsun. Daha sonra (17) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda g(R(\xi,X)Y,Z) - \mu\eta(R(\xi,X)Y)\eta(Z) \\
&\quad -\lambda g(Y,R(\xi,X)Z) - \mu\eta(Y)\eta(R(\xi,X)Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. h tensör alanının ters-simetrik olmasından ötürü (11) Rimeann eğrilik tensörünün özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda\eta(Y)g(h^2X,Z)+\lambda g(h^2Y,X)\eta(Z)+\mu g(h^2Y,X)\eta(Z) \\
&\quad -\lambda\eta(Z)g(Y,h^2X)+\lambda g(h^2Z,X)\eta(Y)-\mu g(h^2Z,X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu son denklemde $Z=\xi$ alınarak,

$$\mu g(h^2Y,X)=0$$

sonucu bulunur.

Son olarak bu denklem yorumlacak olursa $\mu = 0$ veya $g(h^2Y, X) = 0$ dır. $\mu = 0$ ise manifold Einstein manifolddur.

Yada $g(h^2Y, X) = 0$ ise $tr(h^2) = 0$ yani $h = 0$ bulunur. Önerme2.1'den manifold $\mathbb{R} \times N$ Riemann çarpımına lokal olarak izometriktir. Burada N bir yaklaşık Kähler manifolddur.

4. Kaynaklar

Aktan, N. & Tekin, P. 2017. ''An introduction to the new type of Globally framed manifolds'', AIP Conference Proceedings, 20051-20060.

Ayar, G. & Tekin, P.& Aktan, N. 2019. "Some curvature conditions on nearly cosymplectic manifolds", Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics, 10(1), 51-58.

Ayar, G. & Yıldırım, M. 2019. " Ricci solitons on nearly Kenmotsu Manifolds", Asian Europan journal of Mathematics, 13(1), 2040002 (8pages)

Ayar, G. & Yıldırım, M. 2019. " Ricci solitons and gradient Ricci solitons on nearly Kenmotsu manifolds", Facta Unıversitatis (NIS) Ser. Math. Inform, 34(3), 503-510.

Blair, D.E. 1972. "Almost Contact Manifolds with Killing Structure Tensors I", *Pacific Journal of Mathematics,* 39(2), 285-292.

Blair, D.E. & and Showers, D.K. 1974. "Almost Contact Manifolds with Killing Structures Tensors II'', Journal of Differential Geometry, 9(4), 577-582.

Blaga, A.M., 2015. '' $\eta -$Ricci solitons on para-kenmotsu manifolds,'' *Balkan Journal of Geometry and Its Applications,* 20, 1–13.

Bejan, C.L. & Crasmareanu, M., 2011. ''Ricci solitons in manifolds with quasi-constant curvature,'' *Publicationes Mathematicae Debrecen,* 78(1), 235-243.

Banaru, M. 2002. ''On nearly cosymplectic hyper-surfaces in nearly-Kahlerian Manifolds'', *Studia Univ. Babes-Bolyai. Math. Cluj-Napoca,* 47(3), 2-11.

Cho, J.T. & Kimura, M., 2009. ''Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form'', *Tohoku Math. Journal,* 61(2), 205-212.

Calin,C. & Crasmareanu, M., 2012. ''Eta-Ricci solitons on Hopf hypersurfaces in complex space forms'', *Revue Roumaine de Mathematiques pures et appliques,* 57(1), 55-63.

De Nicola, A. & Dileo, G. & Yudin, I. 2018. ''On Nearly Sasakian and Nearly Cosymplectic Manifolds'', *Annali di Matematica* , (197)1, 127–138.

Endo, H. 2005. ''On the Curvature Tensor of Nearly Cosymplectic Manifolds of Constant φ-sectional curvature'', *An. Stiit. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi. Mat. (N.S.),* 439-454.

Hamilton, R.S. 1982. ''Three-manifolds with positive Ricci curvature'', *Journal of Differential Geometry,* 17(2), 255-306.

Hamilton, R.S. 1986. ''The Ricci flow on surfaces'', *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., American Math. Soc.,* 71, 237-262.

Perelman, G. (2002)''The entopy formula for the Ricci flow and its geometric applications'', http://arUiv.org/abs/math.DG/02111159.

Sharma, R. 2014. ''Almost Ricci solitons and K-contact geometry, '' *Monatsh. Math.,* 175, 621–628.

Sharma, R., B.B. Sinha, 1983. "On para- A-Einstein manifolds", Publications De L'institutMathematique, 34(48), 211-215.

Tripathi, M.M.,2008. ‘‘Ricci solitons in contact metric manifold,’’arUiv:0801,4222v1.

Yıldırım, M. Ayar, G. & 2019. “ Nearly cosymplectic manifolds with nullity conditions”, Asian Europan journal of Mathematics, 13(1), 2040012(10pages)